ZEITSCHRIFT

FÜR PHYSIK UND MATHEMATIK.

PHYSIKALISCHE ABTHEILUNG.

I. Beschreibung eines Instrumentes zur Messung der Elasticität der Dämpfe bei den Temperaturen der Atmosphäre. Vom k. k. Regierungsrathe und Director des polytechnischen Institutes, Joseph Prechtl.

Bei den Versuchen über die Elasticität der Dämpfe hängt die Genauigkeit in der Bestimmung der Grösse dieser Elasticität für verschiedene Temperaturen sowohl von der genauen Beobachtung dieser Temperaturen, als auch von der Genauigkeit der Messung der Quecksilbersäule selbst ab, welche mit der Elasticität des Dampfes im Gleichgewichte steht. Beide Bestimmungen sind nicht ohne Schwierigkeiten. Zur genauen Bestimmung der Temperatur der Dämpfe, deren Elasticität beobachtet werden soll, ist es im besonderen wesentlich, dass diese Temperatur geraume Zeit constant erhalten werde, weil man ausserdem niemals sicher ist, ob die beobachtete Temperatur auch wirk-

lich jene der Dämpfe und der zu messenden Quecksilbersäule sey. Diese Beständigkeit der Temperatur durch längere Zeit kann am leichtesten und sichersten in der Luft eines Zimmers erhalten werden; weit sicherer, als mit Hülfe des Wassers; und es schien mir daher, dass sich die Elasticitäten der Dämpfe für mässige Wärmegrade mit der grössten Genauigkeit würden bestimmen lassen, wenn man einen Dampf-Elasticitätsmesser in der Art vorrichtete, dass die Spannkraft der Dämpfe bei der Statt findenden Lufttemperatur jedesmal mit Genauigkeit an demselben gemessen werden kann; so dass die Beobachtungen wie an einem meteorologischen Instrumente, zu jeder Zeit und unter denjenigen Umständen, welche sich als die günstigsten ergeben, gemacht werden können. Zn diesem Behufe habe ich nachstehendes Instrument eingerichtet.

In der Fig. 1 ist AAA eine zweischenklich gebogene Röhre, etwa 12'' hoch, deren Schenkel soviel möglich parallel sind, und eine innere Weite von etwa 4 Linien haben. Beide Enden O P sind verschlossen. Der Raum ON enthält Wasserdämpfe; der Raum PN' ist vollkommen luftleer. Der übrige Raum der Röhre NAN' enthält reines Quecksilber. Diese zweischenklige Röhre ist in das Fussgestell FF durch Einkittung der unteren Krümmung dergestalt befestigt, dass die beiden Schenkel senkrecht stehen. Am oberen Theile werden die beiden Schenkel durch das Querstück OP zusammengehalten; unten auf der oberen Fläche des Fusses, welche nach dem Durchschnitte GH in der Fig. 3 vorgestellt ist, durch das Querstück Q. Diese beiden Verbindungstücke sichern zugleich den Parallelismus der beiden Schenkel, LL' sind zwei etwa ei-

einen Zoll lange, der Länge nach aufgeschlitzte, mit einer kleinen Handhabe versehene, Röhre von Messingblech, welche sich an die Röhren elastisch anschliessen und an denselben auf und ab bewegen lassen; ihre untere Fläche ist, senkrecht auf die Axe, genau abgeschliffen. Stellt man diese Schieber über die Fläche des Quecksilbers in N oder N′; so lässt sich zwischen dieser Fläche und dem untern Rande desselben durchvisiren, so dass man die Lage dieser Niveaus mittelst dieser beiden Schieber genau feststellen kann.

Um nun die durch den Wasserdampf getragene Quecksilbersäule N′S genau messen zu können, ist das Schrauben-Micrometer BCDE angebracht, welches in der Figur 2 von der Seite vorgestellt ist. Es besteht dieses nämlich aus der Schraube BB (Fig. 1) mit der in 100 gleiche Theile getheilten Micrometerscheibe D und dem Rade oder Knopfe E; ferner aus den zwei parallelen Leitungsstangen CC, welche oben durch das Querstück CBC verbunden und unten in den Oeffnungen der Messingplatte TV des auf der oberen Fläche des Fusses aufgeschraubten Trägers mnop (Fig. 2) befestiget sind; endlich in dem Stücke Fig. 4, welches in F′ die Schraubenmutter, seitwärts in FF die mit aufgeschlitzten Hälsen versehenen Oeffnungen für die beiden Leitstangen, und in KK zwei Oeffnungen enthält, durch welche die beiden Glasröhren (mit einigem Spielraume) hindurchgehen.

Endlich ist auf der obern Fläche des Fussgestelles in M (Fig. 3) ein senkrechtes messingenes Lineal von gleicherHöhe mit der Glasröhre, aufgeschraubt, auf welchem das Thermometer RR (Fig. 2) befestiget ist. Die-

ses Thermometer ist in der Art construirt, die ich in IV. Bande der Jahrbücher des polytechnischen Institutes S. 311, beschrieben habe, und statt der Kugel mit einem langen dünnen Cylinder versehen: es enthält nur etwa 32° R ober und 8° R unter 0; und jeder Grad ist in 10 Theile getheilt. Dreissig Grade dieses Thermometers nehmen beiläufig einen Raum von 7 Zollen ein.

Mit diesem Instrumente, das nach Art eines bleibenden meteorologischen Instrumentes im Zimmer aufgestellt werden kann, wird nun auf folgende Weise beobachtet: Nachdem man das Thermometer mehrmal beobachtet, und sich von der Beständigkeit der Temperatur überzeugt hat, stellt man sogleich die beiden Schieber L L′ auf die Quecksilberflächen N N′, indem man mit einer Loupe diese Stellung möglichst genau verrichtet. Wenn man sich von dem Instrumente wieder entfernt, so wird es unter den vorigen Umständen wieder bald auf die vorige Temperatur zurückkommen, wenn sich diese etwa während der ersten Beobachtung geändert haben sollte; dann rectificirt man den Stand der Visiere aufs Neue, bis man von der richtigen Lage derselben sich überzeugt hat. Haben auf diese Art für eine bestimmte Temperatur endlich die beiden Schieber die völlig richtige Stellung erhalten, so kann man nun die Messung der Quecksilbersäule mit aller Bequemlichkeit mittelst des Micrometers vornehmen. Man dreht nämlich mittelst des Knopfes E die Micrometerschraube so lang herum, bis der das Glasrohr einschliessende Ring K′ dem untern Rande des Schiebers L, welcher auf dieser Seite den Stand der Quecksilberfläche bezeichnet, so nahe

kommt, dass mittelst der Loupe nur noch ein äusserst kleiner Zwischenraum bemerkt wird, oder eben die Berührung eintritt; hierauf bemerkt man den Stand des Zeigers u auf der Micrometerscheibe, und dreht nun, unter Abzählung der Umdrehungen, die Schraube so lange, bis der andere Ring K gegen die untere Fläche des Schiebers L′ in eben dieselbe Lage kommt, wie vorher, und zählt die durch das Micrometer angegebenen Theile zusammen; welche nun die absolute Höhe der Quecksilbersäule N′ S bei dieser Temperatur angeben. Um diese Höhen für verschiedene Elasticitäten gehörig vergleichbar zu machen, müssen sie dann auf die Temperatur des Quecksilbers von 0° R reducirt werden.

Die Aufstellung des Instrumentes selbst muss übrigens genau senkrecht seyn. Man überzeugt sich hiervon durch Anwendung eines Senkels, mit welchem man die senkrechte Lage der Glasröhren untersucht. Der Fuss des Instrumentes ist mit Blei eingegossen, um einen festeren Stand zu erhalten, und es ist gut, denselben mit Wachs an eine feste Unterlage anzukleben oder mit Schrauben zu befestigen, damit er die ihm einmal gegebene senkrechte Stellung bei der Bewegung der Micrometerschraube nicht verliere.

Ich habe mit diesem Instrumente schon seit länger als einem Jahre Beobachtungen angestellt, und mich von der Genauigkeit desselben überzeugt. Ich bediente mich Anfangs nur der zweischenkeligen mit den Schiebern L und L′ versehenen, und in dem Fussgestelle befestigten Glasröhre AA. Die Höhe der Quecksilbersäule in beiden Schenkeln, von der Fläche Q aus bis an den untern Rand der Schieber gemessen, nahm

ich mit einem Stangenzirkel ab: Die Differenz dieser gemessenen Höhen gibt der beobachteten Elasticität zugehörige Quecksilberhöhe.

Ist die untere horizontale Linie Q genau bestimmt, und der Stangenzirkel mit einem Micrometer versehen; so gibt auch diese Methode Genauigkeit; obgleich ich glaube, dass die von mir später angewendete, hier beschriebene Einrichtung, durch welche die die Elasticität des Dampfes ausdrückende Quecksilbersäule unmittelbar gemessen wird, den Vorzug verdiene. Bei dem hier beschriebenen Instrumente gehen 42 Gänge der Micrometerschraube auf einen Zoll oder 4200 Micrometertheile betragen einen Zoll, folglich gehen 350 Theile auf eine Linie. Die Annäherung der Quecksilberniveaus an die untern Ränder der Schieber kann auf 3 bis 4 Micrometertheile genau gemessen werden. Die Höhe der zu bestimmenden Quecksilbersäule lässt sich also unter den gehörigen Vorsichten auf $\frac{1}{100}$ Linie genau beobachten. Ich werde zu einer andern Zeit die mit diesem Instrumente gemachten Beobachtungen mittheilen.

Da dieses Instrument übrigens die unmittelbare Ansicht der Quecksilbersäule gewährt, welche bei der Temperatur des Instrumentes und der atmosphärischen Luft von den in der letztern enthaltenen Wasserdämpfen, unter der Voraussetzung getragen wird, dass sie mit Feuchtigkeit gesättiget sey; so kann man dasselbe insofern auch als eine meteorologische, eine deutliche Ansicht dieses Verhaltens dem Anfänger gewährende, Vorrichtung ansehen und gebrauchen.

Das Wesentliche des Instruments ist die zweischenklige Glasröhre, über deren Verfertigung ich

noch Folgendes beizufügen habe: Man wählt die Röhre soviel möglich von gleicher Dicke, was bei einer Länge von nur etwa 2 Fuss keine Schwierigkeit hat. Nachdem sie nun zweischenklig gebogen und an dem einen Ende P (Fig. 1) zugeschmolzen worden ist; so wird sie mit der gehörigen Menge reinen Quecksilbers gefüllt, dieses an das verschlossene Ende P gebracht, und nun über einer Weingeistlampe gehörig ausgekocht. Wenn man nun die doppelte Glasröhre in die senkrechte Lage bringt; so füllt das Quecksilber die eine Glasröhre bis P völlig an, während ein Theil der andern, noch mit der Luft correspondirenden, leer bleibt. Diesen leeren Raum füllt man nun bis nahe an das Ende O mit reinem destillirten, eben ausgekochten Wasser an, zieht da mittelst eines Löthrohrs die schon vorher enger gelassene Oeffnung O in eine kurze dünne Röhre aus, und erhitzt nun ober der Weingeistlampe das in der Röhre enthaltene Wasser zum Sieden, indem man damit bei dem obern Theile O anfängt und abwärts gegen das Quecksilber fortschreitet. Der Wasserdampf strömt nun durch die dünne Oeffnung aus, wobei man nur darauf zu sehen hat, dass dieses Ausströmen niemals unterbrochen, daher die Röhre fortwährend gehörig erhitzt werde. Nachdem nun auch endlich das Wasser über dem Quecksilber zum Verdampfen kommt, wird das dünne Röhrchen, in welches O ausgezogen ist, sogleich zugeschmolzen. Nach der Abkühlung der Röhre sinkt nun das Quecksilber von P nach N′, nach Massgabe der vorhandenen bleibenden Temperatur der Wasserdämpfe.

Durch diese Verfahrungsart werden die ober dem

Quecksilber befindlichen Räume der beiden Glasröhren gänzlich von der Luft befreit; so dass das Instrument auch bei Temperaturen bedeutend unter 0° R noch den angemessenen Ausschlag gibt. Wenn das Wasser in der Röhre ON völlig verdampft worden ist: so hängt in den mittleren Temperaturen das condensirte Wasser in Tropfen an der Wand der Glasröhre, ohne dass auf der Oberfläche des Quecksilbers sich eine in Betracht zu ziehende Menge ansammelte: ist dagegen bei der Schliessung der Röhre noch mehr Wasser vorhanden, so bildet dieses ober dem Quecksilberniveau eine kleine Wassersäule, deren Höhe in den Temperaturen, für welche das Instrument bestimmt ist, ziemlich constant bleibt, und welche, auf Quecksilber reducirt, von der Höhe der gemessenen Quecksilbersäule N′S abgezogen werden muss.

II. Ueber das Glühen des Kalkes in der Oxygenflamme und in der Flamme eines Gemenges aus gleichen Raumtheilen Oehlgas und Oxygengas. Von Prof. Pleischl in Prag.

In mehreren politischen Zeitungen wurde vor kurzer Zeit eines Versuches erwähnt, der in London angestellt worden seyn soll, und so beschrieben wird:

„Man leitet die Flamme einer Weingeistlampe durch einen Strom von Sauerstoffgas auf ein Stück

Kalk, das hierauf 80mal stärker leuchtet, als eine Argand'sche Lampe von derselben Grösse. Das Licht soll in einer Entfernung von 120 Meilen (wahrscheinlich englische Meilen) sichtbar gewesen seyn. Die Ursache dieser Erscheinung ist noch unbekannt."

In dieser Beschreibung ist Manches dunkel ausgedrückt; es ist daher etwas schwierig, nach dieser Notiz den Versuch nachzumachen, und in wissenschaftlichen Blättern ist mir hierüber noch nichts zu Gesichte gekommen. *) Aufgefordert von Einigen, die sich von der Richtigkeit des Erzählten Ueberzeugung zu verschaffen wünschten, musste ich die Umstände, von welchen das Gelingen des Versuches abhängt, erst auffinden. Ich will sie hier mittheilen, weil ich glaube, das Experiment dadurch andern zu erleichtern.

Man zündet eine Weingeistlampe oder eine Oehllampe an, welche letztere sich nach einigen vergleichenden Versuchen, noch besser hierzu zu eignen scheint, und bläst die Flamme mittelst Oxygengas, welches in einer schicklichen Vorrichtung angesammelt sich befindet, (ich hatte eine etwas grosse Schweinsblase dazu verwendet) und aus einer engen Mündung ausströmt, an, wodurch eine Spitzflamme entsteht, die man auf Kalk richtet, kurz also, es ist

---

*) Die erste Nachricht, welche eine wissenschaftliche Zeitschrift enthält, befindet sich im Juni Hefte der Annals of philosophy; aus dem auch die Notiz, welche im dritten Hefte dieser Zeitschrift Seite 306 vorkommt, entlehnt ist. Beide konnte der Herr Verfasser, als er diesen Aufsatz schrieb, noch nicht in den Händen haben, denn das Schreiben, welches ihn begleitete, war vom 10. Juli datirt. (B.)

ein Versuch mit dem Oxygenlöthrohr. Der Ausdruck Löthrohr ist jedoch nicht im strengsten Sinne zu nehmen, denn mit einem eigentlichen Löthrohr geht der Versuch nicht, wenigstens nicht gut. Zuerst nahm ich eine Glasröhre, wie ich selbe zum Ausströmen des Hydrogens bei der chemischen Harmonika anwendete, und hatte das Vergnügen, die Erscheinung eines hellen, blendenden Lichtes gleich beim ersten Versuche hervorzubringen.

Die Glasröhre — da sie in die Weingeistflamme selbst hinein gebracht werden muss, und das durch sie ausströmende Oxygen feucht ist, und diese Feuchtigkeit sich an die Glasröhre absetzt — zersprang jedoch bald, und ich musste mich um eine andere Ausströmungsröhre umsehen. Ich liess daher messingene Röhrchen giessen, an der Spitze fein durchbohren, und an grössere Röhrchen anschrauben. Nach vielen vergeblichen Versuchen kam ich endlich dahin, die Grösse der Ausströmungsöffnung zu finden, bei welcher der Versuch am besten gelingt.

Diese Oeffnung beträgt nach meiner Erfahrnng zwischen $\frac{5}{10}$ und $\frac{6}{10}$ eines Millimeters. Da eine Wiener Linie 0,002195 Meter ausmacht, so sind 0,0005 oder 0,0006 gleich 0,2 bis 0,3 Linien.

Ist die Oeffnung des Ausströmungsröhrchens grösser, so entsteht eine grössere Flamme, welche mit knatterndem Geräusche brennt, und das Glühen des Kalkes nicht zweckmässig hervorbringt.

Bei dem Löthrohr sind, wie bekannt, deutlich zwei Flammenkegel zu unterscheiden, ein äusserer, lichterer, und ein innerer bläulicher.

Soll der Versuch gelingen, so muss der innere

blaue Flammenkegel gerade auf den Kalk treffen, geschieht diess, so kommt der Kalk, in den Zustand des Weisglühens, und verbreitet ein sehr helles und ein sehr blendendes Licht, welches mir noch blendender zu seyn scheint, als jenes, welches der im Oxygengas brennende Phosphor verbreitet.

Was das Wort Kalk eigentlich bedeuten soll, musste auch erst ausgemittelt werden. Um dieses zu erfahren, liess ich gebrannten Kalk bringen, einen Theil davon im Mörser zu Pulver zerreiben, einen andern Theil mit Wasser löschen, und ihn in trockenes Kalkhydrat verwandeln; einige Stücke endlich liess ich unverändert.

Zuerst unterwarf ich die ganzen Stücke dem Versuche, es entstand wohl Glühen, aber das Resultat entsprach der Erwartung nicht ganz; nun kam das zerriebene Kalkpulver, welches auf einer ausgehöhlten Holzkohle lag, und etwas zusammengedrückt und geebnet war, an die Reihe. Die Kohle liess ich jedesmal so halten, dass die Fläche des Kalkes, mit der auf sie treffenden Flamme beinahe einen rechten Winkel bildete. Um das Herunterrollen des Kalkpulvers zu verhüten, musste eine etwas grössere Höhlung in die Kohle gemacht werden, und zwar so, dass unten ein etwas grösserer Vorsprung, gleichsam eine Leiste entstand.

Das entstehende Licht war viel intensiver, als im vorigen Versuche, und ziemlich blendend. Am besten gelang der Versuch mit dem trockenen fein zerriebenen Kalkhydrat; denn als dieses ebenfalls in die Oxygenflamme gebracht wurde, verbreitete sich ein sehr helles und ein sehr blendendes weisses Licht,

welches viel stärker leuchtete, als das Licht, in den vorigen Versuchen, soweit dieses nach dem blossen Augenschein beurtheilt werden konnte.

Nun wollte ich auch andere Körper demselben Versuche unterwerfen. Ich nahm gebrannte Talkerde, und erhielt ebenfalls ein befriedigendes Resultat; Kreide in ganzen Stücken leuchtete ebenfalls gut, nur wurde sie an der Glühungsstelle ätzend, und färbte rothes Lakmuspapier blau.

Zinkoxyd verbreitete ebenfalls viel Licht, doch war das Licht nicht rein weiss, auch fing das Zinkoxyd zu verdampfen an, und es flogen leichte, zarte, weisse Flocken in die Luft.

Thonerde und Kieselerde wurden durch den Luftstrom zerstäubt.

Eisenperoxyd kam zwar in der Oxygenflamme zum heftigen Glühen, aber das verbreitete Licht war nicht weiss, sondern stark roth gefärbt. Es scheint sonach, dass sich nur weisse Körper zu diesen Versuchen eignen, und unter allen am besten das trockene Kalkhydrat, welches zugleich unter allen der wohlfeilste ist.

Ich versuchte, um die Lichtstärke zu vermehren, zwei Ströme von Oxygen auf das Kalkhydrat wirken zu lassen, und brachte es bald dahin, dass der Versuch gelang, indem die Entfernung so genommen wurde, dass die Umkreise beider hellleuchtenden Flächen sich berührten. Das Licht war bedeutend vermehrt; ob aber im geraden, oder in welchem Verhältnisse, kann ich nicht bestimmen.

Da das Oxygen seiner Darstellung wegen ein etwas theurer Körper ist, so wollte ich das Oehlgas ver-

suchen, um zu sehen, ob es nicht das Oxygen zu diesem Behufe ersetzen könnte; überzeugte mich jedoch bald, dass es zu dieser Anwendung nicht ganz geeignet sey; denn ich bemerkte, dass die Flamme des Oehlgases das Kalkhydrat schwärzt, wenn man die ganze Flamme auf das Kalkhydrat wirken lässt, hält man aber das Kalkhydrat so entfernt, dass nur die äusserste Spitze der Flamme selbes berührt, so kommt es wohl auch ins Glühen, aber so hell und leuchtend bei weitem nicht als bei reinem Oxygen.

Um nicht auf halbem Wege stehen zu bleiben, mengte ich das Oehlgas anfangs mit gleichen Raumtheilen atmosphärischer Luft, und sah, dass es jetzt bei weitem besser wirkte. Dadurch ermuthigt mengte ich jetzt Oehlgas mit gleichen Raumtheilen Oxygengas. Obwohl bekannt ist, dass öhlbildendes Gas mit gleichen Raumtheilen Oxygen gemengt, eine Knallluft gibt, welche mit flammenden Körpern angezündet, heftig verpufft, und obschon ebenfalls bekannt ist, dass dasjenige Gas, welches bei trockener Destillation von Oehl erhalten wird, das ich Kürze halber mit Andern Oehlgas nenne, eine sehr beträchtliche Menge öhlbildendes Gas enthalte, ja grösstentheils aus öhlbildendem Gas bestehe, so glaube ich doch, dass bei der angegebenen Weite der Ausströmungsröhrchen durchaus keine Gefahr einer Explosion vorhanden sey, indem die Entzündung durch eine so kleine Oeffnung von 0,0005 Meter sich unmöglich in das Gasmagazin (die Schweinsblase), fortpflanzen könne.

Die Voraussetzung wurde auch durch die Erfahrung auf das vollständigste erprobt, indem die Aus-

strömungsröhrchen viele Minuten in der Weingeistflamme blieben, und so heiss wurden, dass man sich bei ihrer Berührung die Finger ordentlich verbrannte, ohne dass jedoch nur das Geringste von einer Entzündung nach ihnen bemerkt wurde.

Auch hier wendete man mit gutem Erfolge zwei Ausströmungsröhrchen an, um die glühende Oberfläche und das Licht zu vermehren.

Die oben angegebene Art des Experimentes war aber noch immer nicht ganz befriedigend für mich, indem bei Ausführung des Versuches noch einige Schwierigkeiten obwalteten, namentlich der Umstand, dass es beschwerlich war, die Ausströmungsröhrchen so einander zu nähern, dass die Ränder der glühenden, runden Flächen einander berührten.

Ich zündete nun das Gasgemenge aus gleichen Raumtheilen Oehlgas und Oxygengas bestehend an, und bemerkte, dass es an der Mündung des Ausströmungsröhrchens mit einer sehr kleinen, bläulichen, unscheinbaren Flamme fortbrannte; aber wie erstaunte ich, und alle Umstehenden, über das helle und äusserst blendende Licht, welches das Kalkhydrat verbreitete, als dieses Flämmchen es berührte. Es glich in der Form einer kleinen Sonne, und das Auge konnte den Glanz des Lichtes kaum ertragen. Als zwei solcher Flämmchen auf das Kalkhydrat gerichtet wurden, war natürlich die Intensität des Lichtes noch bei weitem grösser. Nun wurde im Eifer noch eine dritte Blase mit ähnlichem Gasgemenge gefüllt, herbeigehohlt, um die glühende Fläche noch mehr zu vergrössern, aber aus Eile nicht beachtet, dass die Ausströmungsöffnung der an dieser Blase

vorhandenen Röhre viel grösser war, als der übrigen zwei Röhrchen. In kurzer Zeit erfolgte ein heftiger Knall, wobei die Blase ganz zerrissen wurde. Zum grössten Glück kam Niemand dabei zu Schaden, und die darneben liegenden zwei andern Blasen blieben ganz unversehrt.

Dieses Fortpflanzen der Entzündung durch die messingene Ausströmungsröhre möge andere Experimentatoren vorsichtiger machen. Um ähnliche Fälle zu verhüten, muss ich anführen, dass bei der nachher vorgenommenen Messung der Durchmesser der Oeffnung dieses Rohres 1,2 Millimeter, oder 0,0012 Meter befunden wurde. Nach längerer Einwirkung der Flamme des Gasgemenges aus Oehlgas und Oxygen fand man die Oberfläche des Kalkhydrates mehrfach zersprungen und zerrissen, doch waren diese Spalten nicht tief, und betrugen kaum den vierten Theil einer Linie ($\frac{1}{4}$ Linie). An der Lichtstärke konnte kein Unterschied beobachtet werden, man mochte eine frische oder schon vorher glühend gewesene und gesprungene Stelle des Kalkhydrates ins Glühen versetzen. Nach längerm Glühen fand man die Farbe des Kalkhydrats etwas verändert; die glühend gewesene Stelle war schmutzig, gelblich, und von einer weissen Einfassung umgeben.

Auch Kreide in ganzen Stücken leuchtete, aber nicht so schön, wie das Kalkhydrat.

Später sah ich, dass die glühende Stelle des Kalkhydrates sich bedeutend vergrössert, wenn man die Flamme des Oehlgasgemenges statt senkrecht, etwas schief einwirken lässt; doch wollte es mir scheinen, als wenn die Intensität des Lichtes dadurch ge-

schwächt worden wäre. Vielleicht schien es mir bloss, wenigstens bemerkte ich, als das Ausströmen des Gases durch vermehrten Druck auf die Schweinsblase verstärkt worden, keinen Unterschied mehr.

Auch Hydrogen wurde versucht, entsprach jedoch nicht. Auch hier fand man nach dem Versuche das Kalkhydrat und die Kreide zerklüftet und etwas gelblich gefärbt.

Durch diese Versuche glaubt der Verfasser diejenigen Umstände ausgemittelt zu haben, von welchen das Gelingen dieses Versuches abhängt, nämlich: Die rechte Grösse der Ausströmungsmündung = 0,0005 M. oder $\frac{2}{10}$ einer Linie Wiener Masses oder $\frac{1}{60}$ eines Zolles, dann dass Kalkhydrat zu diesen Versuchen der tauglichste Körper sey.

Die Ursache der Erscheinung glaubt der Verfasser darin zu finden, dass der Kalk durch die Hitze der Oxygenflamme oder des Gasgemenges aus gleichen Raumtheilen Oehlglas und Oxygen in den weissglühenden Zustand versetzt wird, und dass dieser Zustand des Weissglühens eben die Ursache des hellen, blendenden weit sichtbaren Lichtes sey. Schon oben wurde auf einen ähnlichen Versuch aufmerksam gemacht, nämlich auf das intensive und blendende Licht, welches der Phosphor verbreitet, wenn er im Oxygengas verbrannt wird. Um noch ein ähnliches Beispiel anzuführen, erinnere man sich an das blendende Licht bei der Oxydation des Zinkes, d. h. bei der Bereitung der Zinkblumen auf trockenem Wege.

In diesen beiden Fällen bildet sich ein starrer Körper, als Verbrennungsproduct, welcher in unendlich kleinen Theilchen im Zustande des Weissglü-

hens in der Flamme schwebt, und so die Hervorbringung und Verbreitung des hellen glänzenden Lichtes bewirkt; beim Phosphorverbrennen bildet sich Phosphorsäure; beim Brennen des Zinks, Zinkoxyd.

Das öhlbildende Gas, und das Oehlgas brennen angezündet mit einer sehr hellen, stark leuchtenden Flamme, weil hier so viel Kohlenstoff vorhanden ist, dass nicht die ganze Menge desselben alsogleich mit dem Oxygen der atmosphärischen Luft sich zu Kohlenoxydgas oder Kohlensäure verbinden kann, sondern ein Theil desselben im weissglühenden Zustande im Innern der Flamme schwebend sich erhält, und dadurch die Helligkeit der Flamme hervorbringt.

Im Gegentheil ist die Flamme ganz unscheinbar und klein, wenn ein luftiger (luftförmiger, gasförmiger) Körper als Verbrennungsproduct entsteht. Um wieder mit einigen Beispielen das Gesagte zu beleuchten, erinnere man sich an die Thatsache, dass beim Brennen der Knallluft (2 Raumtheile Hydrogen und ein Raumtheil Oxygen) ein ganz kleines und beim Tageslichte kaum bemerkbares Flämmchen zum Vorschein kommt, aus dem Grunde, weil das Verbrennungsproduct luftig ist, und in Wasserdämpfen besteht.

Dass die Helligkeit der Flamme von der Hitze bei dem Verbrennen wohl unterschieden werden müsse, lehrt das oben angeführte Beispiel, indem hier bei der unscheinbaren Flamme eine solche Hitze hervorgebracht wird, die alle menschliche Vorstellung weit übersteigt, da alle für unschmelzbar gehaltene Körper dieser Hitze nicht widerstehen und schmelzen.

Als zweites Beispiel mag der obige Fall dienen. Das Oehlgas verbreitet beim Brennen ein helles und

glänzendes Licht aus dem oben angegebenen Grunde. Ist es aber mit gleichen Raumtheilen Oxygen gemengt, so brennt es, wie ebenfalls oben schon bemerkt wurde, mit einer kleinen, bläulichen, wenig leuchtenden Flamme, weil hier beim Verbrennen lauter luftige Verbindungen entstehen, nämlich theils Wasser, theils Kohlenoxydgas, theils Kohlensäure.

Die Ursache des hellen Leuchtens des Kalkhydrats wäre somit auch nachgewiesen, und auf analoge Fälle reducirt; ja man könnte es sogar sonderbar finden, dass man nicht schon lange durch Analogie geleitet auf diesen Versuch gekommen ist, wenn es nicht ein alter Erfahrungssatz wäre, dass man das zunächst liegende gewöhnlich am spätesten findet.

Ob von dieser Entdeckung eine Anwendung wird gemacht werden können? Wahrscheinlich, wenn erst noch einige Hindernisse beseitigt seyn werden. Das Herabrollen des Kalkhydrats wird sich wohl verhindern lassen, obwohl ich jetzt noch nicht weiss, wie, wenn von einer Anwendung im Grossen die Rede seyn sollte. Wendet man das mit Oxygen gemengte Oehlgas an, zündet man das aus der engen Mündung strömende Gas an, und lässt die kleine Flamme auf das Kalkhydrat wirken, so lässt sich das Herunterrutschen desselben durch eine Kante auf der Kohle so ziemlich, wenigstens im Kleinen verhindern, besonders wenn man die Flamme, statt senkrecht, etwas schief auf das Kalkhydrat wirken lässt, wo der Kalk auf der schiefen Ebene ganz ruhig liegen bleibt.

Das Gemenge aus Oehlgas und Oxygen, welches nach dem Ergebnisse meiner Versuche dem reinen Oxygen vorzuziehen seyn möchte, könnte seiner ex-

plodirenden Eigenschaft wegen, Manchen abschrecken; allein erstens glaube ich, dass bei der oben angegebenen Grösse der Ausströmungsmündung keine Fortpflanzung der Entzündung in die Gas-Vorrathskammer Statt finden könne; und zweitens, die Möglichkeit zugegeben, dass sich die Entzündung durch das engmündige und lange Ausströmungsrohr fortpflanzen könne, so braucht man, wie beim Neumann'schen Knallluftgebläse, nur einige sehr enge Drahtgitter anzubringen, und die Gefahr des Explodirens ist beseitiget.

Ob dieses Licht in einer Entfernung von 120 englischen Meilen, welche (da eine gesetzmässige englische Meile 848 niederöstr. Klafter gleich ist,) 25,44 österreichische Meilen betragen, sichtbar ist, müssen Versuche entscheiden; vor der Hand hat man keine Ursache dieses zu bezweifeln, vorzüglich, wenn Spiegel mit zu Hülfe genommen werden.

Letzterer Umstand führt unwillkührlich auf das Heliotrop von Gauss zurück, dessen Anwendung durch das oft eigensinnige Sonnenlicht sehr erschwert wird; bedient man sich aber des Lichtes vom glühenden Kalke statt des Sonnenlichtes, so ist man vom Sonnenschein unabhängig, und die Beobachtungen mit dem Heliotrop können auch bei umwölktem Himmel, vielleicht auch bei Nachtzeit angestellt werden, und würden um so leichter aus der Ferne bemerkbar seyn.

Auch auf Leuchtthürmen wird man davon Anwendung machen können, und hier dürfte vielleicht die neue Entdeckung an ihrem schicklichsten Platze seyn, indem man hier ruhig stehende Gasometer anbringen

kann, aus welchen das Gas durch zahlreiche Röhrchen ausströmt, und die Flamme der Weingeist- oder Oehllampe auf den Kalk treibt, und zum hellsten Weissglühen bringt.

Das blosse Oxygengas dürfte bei der Ausführung im Grossen einige Schwierigkeiten, welche der menschliche Scharfsinn zwar zu beseitigen lernen wird, darbieten, indem hiezu eine Weingeist- oder Oehllampe erfordert wird, und es doch etwas schwer hält, mehrere Flammenkegel von gleicher Länge wie es hiezu nothwendig ist, hervorzubringen. Um eine grössere Wirkung zu erlangen, muss das ganze Streben dahin gerichtet seyn, eine grosse Fläche des Kalks ins Glühen zu versetzen. Dieses wird vielleicht nur dadurch möglich werden, dass man viele Ausströmungsröhrchen anbringt, welche so gestellt sind, dass die durch sie ins Glühen versetzten runden Stellen in einander fliessen, und so nur eine einzige grosse glühende Fläche entsteht. Dass sich auch die Oehllampe hierzu eignet, und nach meinen Versuchen beinahe vortheilhafter als die Weingeistlampe ist, indem das Oehl ein viel wohlfeileres Brennmaterial abgibt, als Weingeist; doch dürfte die Anwendung einer oder mehrerer Lampen immer mit Schwierigkeiten verbunden seyn.

Wendet man aber ein Gemenge aus Oehlgas und Oxygen an, so braucht man erstlich gar keine Lampe, und zweitens, man kann so viel Ausströmungsröhrchen anbringen, so viel man ihrer benöthigt. Das Anzünden geschieht wie bei der Gasbeleuchtung. Die Gefahr, dass sich die Entzündung bis ins Gasreservoir fortpflanzen könnte, kann wie beim Neumannischen

Gebläse durch Drahtgitter allein, oder durch Drahtgitter und dazwischen liegende Asbestfäden, oder durch Drahtgitter und durch ein Stöpselventil, welches mit Quecksilber gesperrt ist, beseitigt werden.

III. Untersuchungen über die Farbe der Flamme verschiedener Körper. Nach Talbot und Blackadder, frei dargestellt.

Bekanntlich gibt es zwei Wege, die Beschaffenheit der Farbe irgend eines leuchtenden Körpers zu erfahren, indem man entweder das Licht auf ein durchsichtiges dreiseitiges Prisma leitet, und die Beschaffenheit und Vertheilung der Farben in dem dadurch entstandenen Farbenbilde beobachtet, oder indem man diese Farbe mit freiem Auge untersucht, und vorzüglich darauf achtet, ob sich an allen Stellen dieselbe Färbung zeigt, oder verschiedenfarbige Stellen vorkommen. Auf dem ersten Wege haben wir bereits durch den unsterblichen Fraunhofer manches Neue kennen gelernt; auf demselben hat auch Talbot mehrere interessante Beobachtungen gemacht. Den zweiten Weg hat Blackadder betreten, und dabei vorzüglich den Grund einer bestimmten Färbung zu erforschen gesucht. Die Untersuchungen beider folgen hier in möglichster Kürze und mit Hinweglassung alles minder Interessanten.

1.

Talbot's Untersuchungen.

(Edinb. Journ. of Science. Nr. IX. p. 77.)

1. Nach Brewsters Erfahrungen besteht die Flamme des mit Wasser verdünnten Weingeistes aus völlig homogenem gelben Lichte. Eine Lampe mit dieser Flüssigkeit verdient daher den Namen einer monochromatischen, und ist von ihm zur Beleuchtung der Gegenstände, die man mit einem Microscope ansieht, empfohlen worden; allein sie gibt selbst bei einer grossen Flamme nur wenig intensives Licht. Wenn man einen Docht aus Baumwolle mit einer Auflösung von salzsaurer, schwefelsaurer oder kohlensaurer Soda tränkt, trocknet, und in eine Lampe einsetzt, so bekommt man anhaltend starkes gelbes Licht. Eine Lampe mit zehn solchen in eine Reihe gestellten Dochten gibt ein fast eben so intensives Licht, wie eine Wachskerze. Blaues Glas absorbirt die gelben Strahlen einer solchen Lampe, und lässt nur schwache violette durch; werden diese durch ein blassgelbes Glas aufgefangen, so sieht man dahinter die Flamme gar nicht, während eine gewöhnliche Kerzenflamme daselbst recht wohl sichtbar ist. Die gelben Strahlen, die mit wenigen blauen und grünen die Flamme bilden, sind ganz homogen. Wird der Docht in einer Lösung von salpetersaurem, chlorsauren, schwefelsauren und kohlensauren Kali getränkt, so entsteht eine bläulich weisse Flamme.

2. Nach Herschels Erfahrungen gibt lebhaft brennender Schwefel homogenes gelbes Licht. Talbot prüfte es dadurch, dass er Schwefel mit Sal-

peter vermischt hinter einem Schirme anzündete, der eine enge Spalte hatte, durch welche das Licht herauskam. Als es durch ein Prisma gegangen war, gab es ein Farbenbild, mit einem sehr hellen, gelben Streifen. Um zu untersuchen, ob dieses gelbe Licht mit dem auf die vorhin angegebene Weise erhaltenen homogen sey, brachte er eine Flamme so hinter der anderen an, dass beide ihr Licht auf einmal durch die Spalte des Schirmes auf das Prisma senden konnten. Er erhielt aber im Farbenbilde wieder nur einen gelben Streifen, zum Beweise, dass beide Farben homogen seyen, und durch das Prisma auf gleiche Weise abgelenkt werden. Dasselbe Resultat erhielt er, als das Licht untersucht wurde, das sich aus einem Gemenge von Schwefel, Salpeter, und einem der oben zuerst genannten Salze entwickelte.

3. Hält man ein reines Stück Platin in den blauen Theil einer Gaslichtflamme, so ändert sich dadurch die Farbe derselben nicht, rührt man aber das Platin zuerst mit der Hand an, so entwickelt sich gelbes Licht eine Minute lang, oder noch länger; reibt man es mit Seife, so wird dieses Licht noch stärker. Wachs leistet dieses aber nicht. Salz auf Platin gestreut, verknistert in der Flamme, und macht die Flamme gelb. Aus diesen Erscheinungen könnte man den Schluss ziehen, dass das gelbe Licht vom Krystallisationswasser herrühre, wenn dieses Wasser nicht in anderen Salzen vorhanden wäre, die doch nicht dieselbe Wirkung hervorbringen, und Schwefel, der mit gelber Flamme brennt, nicht wasserfrei wäre.

Ein Stückchen salzsaurer Kalk auf den Docht einer Weingeistlampe gelegt, gibt der Lampe einen

ganzen Abend hindurch eine rothe und grüne Farbe, ohne eine Verminderung zu erleiden. Ein Tropfen Oehl auf den Docht einer Weingeistlampe gegeben, ertheilt der Flamme den Glanz eines Kerzenlichtes, und eine nach aussenhin gelbe Flamme, aber nur so lange, bis er verbrannt ist.

4. Die Flamme aus Schwefel und Salpeter enthält überdiess noch einen merkwürgigen rothen Antheil. Als Talbot den gelben Streifen im Farbenbilde dieses Flammenlichtes mit einem Prisma untersuchte, bemerkte er einen andern rothen Streifen ausserhalb des gewöhnlichen rothen, der von ihm durch einen dunklen Raum getrennt, mithin minder brechbar war, als dieser. Er ist schwach leuchtend, und kann nur mit einem guten Prisma bemerkt werden. An Farbe waren beide rothe Antheile nicht von einander verschieden. Dieser Streifen kommt wahrscheinlich vom Salpeter, den man bemerkte ihn auch in der Flamme einer Weingeistlampe, deren Docht mit salpetersaurer oder chlorsaurer Pottasche getränkt ist. Es scheint, als wenn dieser rothe Antheil das Licht der Kalisalze, der gelbe hingegen das der Sodasalze charakterisire.

5. Phosphor mit Salpeter gibt ein sehr intensiv leuchtendes Farbenbild, in welchem keine Farbe fehlt oder vorwaltet. Es ähnelt den Farbenbildern des Lichtes von glühendem Kalk, Platin, und andern festen Körpern, und unterscheidet sich wesentlich vom Sonnenspectrum, in welchem unzähliche schwarze Linien vorkommen. Es ist merkwürdig, dass dem Sonnenlichte nur das der Himmelskörper ähnlich ist.

6. Das rothe Licht, welches man in Schauspiel-

häusern braucht, gibt ein herrliches Spectrum mit vielen vorherrschend lichten und dunklen Linien. Im rothen Theil sind diese Linien in Menge vorhanden und durch dunkle Zwischenräume von einander getrennt, auch kommt der oben erwähnte äusserst rothe Streifen vor, der wahrscheinlich vom Salpeter herrührt. Im orangefarbigen Theil befand sich eine leuchtende Linie, im gelben auch eine, im grünen drei, im blauen war eine sehr helle und mehrere schwächere. Die leuchtende Linie im Gelb rührt wahrscheinlich vom Schwefel her, die andern mögen im Spiessglanz, Strontian, etc. ihren Ursprung haben. Besonders mag der orange Theil vom Strontian herkommen, weil Herschel in der Flamme des salzsauren Strontian einen orangefarbigen Strahl gefunden hat. Wenn dasselbe auch von allen anderen gilt, was hier vom gelben, rothen und orangefarbigen gesagt wurde, so wird man noch dahin kommen, aus der Beschaffenheit des Farbenbildes einer Flamme die chemische Zusammensetzung der Körper, die sich darin befinden, zu erkennen.

2.

Blackadder's Untersuchungen.

(Edinb. new. phil. jour. I. p. 52.)

Die Flamme eines brennenden Körpers besteht aus mehreren von einander wohl zu unterscheidenden Theilen. Der innere conische Theil ist mit mehreren äusseren umgeben, welche die eigentliche Flamme bilden und so unabhängig von einander sind, dass man einen derselben wegnehmen kann, ohne dadurch

die andern merklich zu afficiren. Wenn Hydrogen enthaltende Körper brennen und ohne Beihülfe des Löthrohrs oder eines anderen ähnlichen Mittels eine blaue Flamme bilden, so besteht diese aus zwei Theilen. Der eine folgt unmittelbar auf den Gas- oder Dunstkegel nach aussen zu, und hat, von der Seite angesehen, den Anschein eines breiten blauen Streifens, der sich von der Basis des Kegels bis zur Spitze desselben erstreckt. Ausserhalb dieser befindet sich ein dunkler, blauer Theil, der sich mehr oder weniger über den vorigen ausbreitet und von aussen bürstenartig begrenzt ist.

Wenn die vorhin genannten Substanzen mit weissem Lichte brennen, so erscheint der weisse Antheil innerhalb der blauen Schichte, aber jener reicht nicht bis zur Basis des Kegels und diesen kann man nur bis zu einer kleinen Entfernung am Aeusseren des weissen Antheils verfolgen.

Untersucht man die Flamme einer gut zugerichteten Kerze, so bemerkt man, dass der blaue Streifen ausserhalb des weissen Lichtes der Spitze des durchsichtigen Kegels oder der Stelle, wo sich das weisse Licht mit grossem Glanze entwickelt, gegenüber, verschwindet.

Eben so bemerkt man den äussersten blauen Theil oberhalb der Mitte der Flamme, wo das weisse Licht intensiv zu werden anfängt, nicht leicht.

Die Farbe des Lichtes einer Flamme hängt von der Art des Verbrennens und von der Gegenwart fremdartiger Körper ab.

Wenn man Alkohol von specifischem Gewichte 0.835 in einer Lampe ohne Docht verbrennt (welches

am leichtesten in einer Lampe geschieht, die ein communicirendes Gefäss vorstellt, wovon ein Arm kugelförmig, der andere in eine dünne enge Röhre ausgezogen ist), und der Flamme die Länge eines halben Zolles gibt, so erscheint sie durchaus blau. Hat sie aber eine Länge von 1 oder $1\frac{1}{2}$ Zoll, so entwickelt sich eine bedeutende Menge weissen Lichtes. Bringt man die Röhre, aus welcher die Flamme heraustritt, zur Rothglühhitze dadurch, dass man sie in eine blaue Weingeistflamme hält, so werden einige Theile des Weingeistes, die mit dieser Röhre in Berührung kommen, herausgeschleudert, und geben ein gelbes Licht. Es wird also blaues, weisses und gelbes Licht beim Verbrennen derselben Flüssigkeit entwickelt.

Oehl kann beim Verbrennen weisses, weisses und blaues oder blaues und gelbes Licht geben. Brennt es ohne Docht in einer Lampe mit starker Flamme, so ist das Licht blau mit einem grossen Antheil von Weiss; wird aber der Zufluss des Oehles nach und nach vermindert, so nimmt das weisse Licht ab und zuletzt bleibt nur weisses übrig. Wird der Zufluss des Oehles wieder stärker, so erscheint mitten im blauen Theil der Flamme eine gelbe Stelle, die beim ferneren Zuflusse in gelblich weiss, als die gewöhnliche Farbe übergeht. Nach demselben Grundsatze kann das in einem Weinglase enthaltene Oehl entweder blaues oder weisses und blaues Licht geben.

Wenn verdünnter Alkohol, wie man ihn zum Verbrennen zu brauchen pflegt, in einer Lampe ohne Docht brennt, so ist die Flamme blau, oder blau und weiss, wie die des reinen Alkohols. In diesem Falle

wird der Weingeist destillirt und verbrannt. Das Wasser wird, bevor es durch die Flamme geht, ausgeschieden, ohne bedeutend erwärmt worden zu seyn, und nur die Brandröhre erlangt eine merkliche Temperaturerhöhung. Die Flamme ist conisch und das Verbrennen geht ohne Geräusch vor sich. Daher kann man in einer Lampe, wo die Flamme aus einer Röhre ohne Docht herausbrennt, gewöhnlichen Weingeist statt Alkohol verbrauchen.

Wird verdünnter Weingeist mit einem Docht verbrannt, so ist die Flamme nicht blau und weiss, wie im vorigen Falle, sondern grösstentheils gelb. Die weisse Farbe verschwindet gänzlich und nur ein Theil der Basis der Flamme ist blau. Die Flamme ist weniger regelmässig gestaltet, flackert beständig hin und her, und man hört ein immerwährendes Knistern. Der Docht wird nicht verkohlt und erleidet überhaupt keine Veränderung. In diesem Falle findet gleichzeitig eine Verflüchtigung und ein Verbrennen der alkoholigen Theile Statt, sie werden aber wohl, wie in einer Lampe ohne Docht, von den wässerigen getrennt. Ein Theil des Wassers wird in Dünste verwandelt, ein anderer bleibt im Docht zurück und macht, dass man ihn öfters wechseln muss. Da dieser zugleich von der Flamme erwärmt wird, so werden nicht bloss Alkohol- sondern auch Wasserdünste in das Innere der Flamme geschleudert. Es beträgt desshalb die Wassermenge im Docht, wenn aller Weingeist verbrannt ist, nicht so viel, als ursprünglich im verdünnten Weingeiste enthalten war, wie man leicht aus seinem specifischen Gewichte abnehmen kann. Hieraus sieht man, dass im gelben Theil der Flamme

Wasserdünste enthalten sind, allein es folgt daraus noch nicht, dass diese die gelbe Farbe verursachen; denn es gibt jeder Weingeist bei einer gewissen Behandlung eine gelbe Flamme.

Ein durch wissenschaftliche Verdienste ausgezeichneter Mann (Brewster) behauptet, durch viele genaue Versuche ausgemittelt zu haben, dass alle Körper, die nur unvollkommen verbrennen, wie Baumwolle, Linnen, Papier etc. solches Licht geben, in welchem die gelben Strahlen vorwalten, und dass die Entwickelung dieses Lichtes von der Natur des Dochtes und von der Schnelligkeit abhängt, mit welcher die Flüssigkeit verdampft. Da nun mit Wasser verdünnter Alkohol beim Verbrennen viel gelbes Licht gibt, so scheint der Schluss nicht übereilt zu seyn, dass durch das Wasser der Alkohol zu einem unvollkommenen Verbrennen gleichsam disponirt wird. Dessungeachtet kann man sich noch fragen, was ist unvollkomenes Verbrennen? Ist die Gegenwart des Wassers dazu unumgänglich nothwendig. Folgende wenige Thatsachen mögen zur Beantwortung dieser Fragen etwas beitragen, und zur näheren Untersuchung reitzen.

Die blaue Flamme des Weingeistes hat, dem Vorausgesagten gemäss, eine regelmässige Gestalt und das Verbrennen geht dabei ruhig vor sich; brennt er mit einem Docht, so erzeugt sich gelbes Licht, die Flamme ist unstät und man vernimmt ein beständiges Knistern. Dieses rührt wahrscheinlich von sehr schwachen Explosionen her, die da erfolgen, wo der blaue Theil erscheint, indess geht nicht dieser, sondern der äussere Theil in Gelb über. Die blaue Flam-

me Alkohol haltiger Stoffe vergrössert sich, wenn man die aus der Röhre ohne Docht hervortretende Flüssigkeit mit einem heissen Draht berührt, ohne jedoch die Farbe merklich zu ändern. Man kann aber durch Berühren der Mündung obiger Röhre mit einem solchen Draht oder mit einer Glasröhre bewirken, dass kleine Theile davon weggeschleudert werden, wie wenn man ein heisses Stück Metall in Wasser taucht. Diese kleinen Theile dringen ins Innere der Flamme ein, scheinen zu explodiren und am äusserten Theile der Flamme das trübe Gelb zu erzeugen. Bedient man sich eines Dochtes aus Baumwolle oder Schwamm, so vertritt dieser die Stelle des genannten Drathes; je rauher seine Oberfläche ist, und je weiter er in die Flamme hinein reicht, um desto mehr gelbes Licht entwickelt sich. Dieses wird durch Folgendes erläutert: Man befestige eine kleine Kugel aus Baumwolle an einen Glasstab, und benetze sie mit Alkohol. Zündet man diesen an, so brennt er mit gelber Flamme, doch wird die Menge des gelben Lichtes bedeutend vermehrt, wenn man die Kugel schnell um ihre Axe dreht. Durch das Drehen wird die Flamme dem Kügelchen näher gebracht, und in dieselbe auch mehr Weingeist getrieben.

Dampf, der mit Gewalt aus einer Oeffnung herausfährt, vertritt die Stelle eines Löthrohres, wird er aber in sichtbaren Dunst verwandelt, so ändert er die blaue Farbe einer Weingeistflamme nicht. Setzt man aber unter die Röhre, aus welcher der Weingeist herausbrennt, ein kleines Gefäss mit Wasser, und taucht ein heisses Metallstück hinein, damit dadurch Wasserdämpfe in die Flamme geschleu-

dert werden, so entwickelt sich alsogleich gelbes Licht. Ein Theil davon ist offenbar durch kleine, feste Theile hervorgebracht, die vom Metall sich los gemacht haben; indess bringen verschiedene Metalle ähnliche Wirkungen hervor, und Theile vom kalten oder siedend heissen Wasser durch mechanische Mittel in die Flamme gebracht, ändern die Farbe derselben nicht. Nähert man zwei blaue Flammen einander, so ändert sich dadurch ihre Farbe nicht; bringt man aber eine blaue Flamme mit einer gelben in Berührung, so wird jene auch gelb.

Es ist bekannt, dass Kohlenoxydgas und gekohltes Wasserstoffgas beim Verbrennen gelbes Licht geben. Zündet man einen Splitter aus Holz oder einer andern vegetabilischen Substanz an, und löscht ihn nach wenigen Secunden wieder aus, so geht ein weisslichter Rauch davon aus, der eine blaue Flamme gelb färbt. Berührt man mit dem Ende eines verkohlten Holzstückes eine Flamme, oder bringt ihr dasselbe nur nahe, so wird der äussere Theil derselben gelb. Hier könnte aber doch eine kleine Quantität Wasser mit im Spiele gewesen seyn. Lässt man aber ein Stück Holz gänzlich verglimmen, so kann man wohl keine Feuchtigkeit vermuthen, und doch ward dadurch die blaue Flamme gelb gefärbt. Reibt man zwei verkohlte Holzstücke unterhalb einer blauen Flamme, so wird sie auch gelb.

Denselben Effect erlangt man, wenn man ein solches Stück Holz mit einem Messer kratzt, während es sich unter der Flamme befindet.

Verschiedene Salze, wie z. B. salzsaurer Baryt, salzsaure Soda, färben eine Flamme gelb, und man

schreibt dieses gewöhnlich dem Krystallisationswasser zu. Aber bei dieser Voraussetzung ist es schwer zu begreifen, warum dieses nicht alle Salze thun, die Krystallisationswasser enthalten. Immerhin mag das Wasser zur Bildung des farbigen Lichtes mitwirken, es kann aber nicht die Hauptursache abgeben.

IV. Ueber das Brechungsvermögen zweier in Mineralien neu entdeckter Flüssigkeiten, nebst Beobachtungen über die Natur dieser Substanzen von D. Brewster.

(Edinb. Journal of Science. Nr. IX. p. 122.)

Brewster hat bekanntlich in Amethysten und Topasen Höhlungen entdeckt, die mit zwei eigenen Flüssigkeiten angefüllt sind. Man hielt die in beiden Mineralien vorkommenden Flüssigkeiten für itendisch, weil sie von der Wärme gleich ausgedehnt werden, allein um dieses mit Bestimmtheit ausmachen zu können, war es nothwendig, das Brechungsvermögen beider zu bestimmen. Dazu gab der Umstand eine schickliche Gelegenheit, dass Brewster eine Höhlung fand, deren Gestalt und Lage im Krystalle die genaue Messung dieses Vermögens beider Flüssigkeiten gestattete. Die Lage dieser Höhlung stellt Fig. 5 vor, wo C einen auf ihr senkrechten Durchschnitt der Länge nach angibt, welcher gegen den Blätter-

durchgang EF und GH des Topases geneigt ist. Das Verfahren Brewsters, um dieses Vermögen zu bestimmen, war folgendes:

Er befestigte den Krystall mit der Höhlung bei einer Temperatur von 60° F. am Goniometer, und mass den Winkel, unter welchem ein von einem Kerzenlichte kommender Lichtstrahl RD auf EF auffällt, wenn er beim Eintritt in die Höhlung anfing eine totale Reflexion zu erleiden. Dieser Winkel betrug 38° 42′; hierauf berechnete er nach dem Index des Brechungsverhältnisses im Topas, welcher = 1.620 ist, den Brechungswinkel CDB und den Winkel DCP, unter welchem der Strahl auf AB auffällt, und fand ersteren = 22° 42′, letzteren = 37° 38′ 35″; daher betrug der Winkel ADC = 67° 18′, der Winkel ACD = 52° 21′, und DAC als die Neigung der Seitenfläche der Höhlung gegen die brechende Oberfläche EF = 60° 21′.

Heisst man den Winkel FAB = x, CDB = φ, und den Winkel der totalen Reflexion ψ, so hat man

$$x = \psi + \varphi$$

weil in den ähnlichen Dreiecken ADB und CPB die Winkel CAD und CPB einander gleich sind, und man hat CPB = DPQ = CDB + DCP.

Es wurde nun, ohne das Goniometer vom Platze zu verrücken, der getheilte Kreis desselben um seine Axe gedreht, bis derselbe Strahl RD an der brechenden Oberfläche der expansiveren Flüssigkeit im Topase eine totale Reflexion erlitt. Da betrug der Einfallswinkel KDR′ 26° 29′. Beim ferneren Drehen des Kreises erlitt derselbe Strahl an der Fläche, welche die zweite Flüssigkeit vom Topas trennte, eine totale Re-

flexion beim Einfallswinkel von 11° 52′. Ist nun m der Index des Brechungsverhältnisses einer Substanz, so ist der Sinus des Winkels, unter welchem das Licht einfallen muss, damit es an der zweiten Fläche die totale Reflexion erleidet $= \frac{1}{m}$, und wenn eine Flüssigkeit mit dieser Fläche in Berührung steht $= \frac{m'}{m}$, voransgesetzt, dass der Exponent des Brechungsverhältnisses der Flüssigkeit m′ ist. Daher hat man

$$m' = m \cdot \sin \psi.$$

Ist nun δ der Einfallswinkel, φ, φ', φ'' die Brechungswinkel, m, m′, m″ die Exponenten der Brechungsverhältnisse für Topas, die ausdehnbarere und die andere Flüssigkeit, so hat man

$$\sin \varphi = \frac{\sin \delta}{m}, \quad \varphi' - x = \psi, \text{ und}$$

$$m' = m \cdot \sin (\varphi' - x)$$

$$m'' = m \cdot \sin (\varphi'' - x).$$

Hiernach erhält man folgende Werthe für m, m′ und m″

$$m = 1.620$$

$$m' = 1.1311$$

$$m'' = 1.2946.$$

Viele, denen die neuen Flüssigkeiten interessant schienen, konnten keine solchen Exemplare der Mineralien finden, welche sie enthalten. Brewster meint, dieses rühre daher, dass sie nur immer schön krystallisirte Stücke wählten, wie man sie in mineralogischen Sammlungen hat. Unter den abgerundeten, unvollkommen krystallisirten weissen Topasen aus Brasilien oder Neu-Holland findet man selten ein

Stück, in dem man nicht mittelst eines zusammengesetzten Microscopes unzählige, mit den genannten Flüssigkeiten gefüllte Höhlungen bemerkt. Bei einiger Uebung im Spalten und Zurichten der Mineralien wird ein Beobachter leicht in jedem Exemplare solche Höhlungen entdecken und bemerken, wie sich die Flüssigkeit aus denselben über die Spaltungsflächen ergiessen.

1.

Ueber die Anzahl und Anordnung der Höhlungen.

Brewster hat schon in einer früheren Abhandlung gezeigt, dass er in einem Exemplar von Cymophan, das $\frac{1}{7}$ Q. Zoll Fläche darboth, 30000 Höhlungen gezählt habe. Und doch gibt dieses nur ein schwaches Bild von ihrer eigentlichen Anzahl. Sie sind oft so klein, dass man sie nur durch sehr stark vergrössernde Microscope sichtbar machen kann, und man eben so leicht die Sandkörner am Meere zählen könnte, als diese Höhlungen.

Die Schichten, in denen sie liegen, stehen weder mit den primären noch mit den secundären Flächen der Krystalle in einer Beziehung. Man findet sie in jeder möglichen Richtung, und sie schneiden einander in Winkeln, die von denen der Krystalle ganz unabhängig sind. In einem Quarzkrystalle fand sie Sommerville in Gruppen, wie Bienenzellen angeordnet; sah man sie im reflectirten Lichte an, so schienen ihre entsprechenden Flächen einander parallel zu seyn, jedoch hatten die Höhlungen gegen einander

die mannigfaltigsten Lagen. In anderen Exemplaren bilden sie Flächen mit veränderlicher, und oft mit entgegengesetzter Krümmung, in einem anderen Exemplare, das Herrn **Sivright** gehört, liegen die Höhlungen in Gruppen, welche der feinsten gekrümmten Haarlocke ähnlich sind. In einem Exemplare von blauen brasilianischem Topas, der dem Steinhändler Spaden in Edinburg gehört, finden sich die Höhlungen in vier mit einander parallelen Schichten, die eine Dicke von $\frac{1}{9}$ Z. einnehmen. Die Anordnung der meisten Gruppen scheint der Zufall bestimmt zu haben; einige aber scheinen nach bestimmten Principien geordnet zu seyn.

In einem Stücke ist eine grosse Anzahl Höhlungen in geraden von einem Mittelpuncte wie Radien ausgehenden Linien angeordnet; jede geradlinige Gruppe besteht aus zwei, einige gar aus drei Reihen von Höhlungen, und alle laufen gegen ihren gemeinschaftlichen Ursprung zusammen. Der Raum zwischen je zwei Reihen ist mit sonderbar verzweigten Höhlungen ausgefüllt, deren einige einen halben Zoll lang sind. Das merkwürdigste daran ist, dass diese Höhlungen durch unzählige feine Aeste verbunden sind, wovon einige mit einer einzelnen Oeffnung der nächsten Reihe, zwischen welcher die lange Oeffnung liegt, communiciren.

In jeder Höhlung dieses merkwürdigen Minerals, die untersucht werden konnte, fanden sich beide neue Flüssigkeiten mit Ausnahme einer langen Höhlung, aus der sie entwichen sind, weil sie auf einer Seite vom Steinschneider geöffnet war. Die dichte Flüssigkeit nahm stets die fadenartigen Linien ein. Die

Fläche, in der die Höhlungen liegen, ist vollkommen eben, und beinahe senkrecht auf der Axe des Prisma.

2.

Ueber die Gestalt der Höhlungen, welche die Flüssigkeiten enthalten.

In einem der schönsten Topaskrystalle, die Brewster je gesehen hatte, bestand jede Höhlung aus mehreren einzelnen von verschiedener Länge und Breite, die mittelst paralleler Linien mit einander verbunden sind, und mit einander durch so feine Canäle communiciren, dass sie einem oft selbst dann entgehen, wenn man sich eines Microscopes bedient. In diesen Höhlungen sind die beiden Flüssigkeiten auf das merkwürdigste angeordnet; die dichtere nimmt die Ecken und feinen Canäle, die ausdehnbarere nimmt die weiteren Räume ein. Erwärmt man das Mineral mit der Hand, so geräth alle Flüssigkeit in Bewegung. Die dichtere verlässt ihre Ecken, und nimmt einen neuen Ort ein, und die verschiedenen Theile der ausdehnbareren Flüssigkeit vereinigen sich entweder mit einander, oder werden von einander durch dazwischen tretende Theile der dichteren Masse getrennt, die aus ihrer vorigen Lage vertrieben, und durch Capillarität in eine neue gebracht sind. Diese Lage verlassen sie wieder, wenn das Mineral abkühlt, und nehmen ihren vorigen Platz ein.

AB in Fig. 6 stellt Höhlungen dar, die einer Anzahl paralleler Cylinder gleichen, wovon einige aus schwer zu entziffernden Ursachen gegen C zu gewendet sind, so dass sie nach oben zu offen dastehen.

Desshalb sind auch die Flüssigkeiten daraus entwichen, und haben im Innern der Höhlung eine dunkle, durchsichtige, pulverige Masse zurückgelassen, welches bei der Verdünstung immer geschieht. Sieht man die von ihrer Flüssigkeit befreiten Höhlungen mit einem Microscope an, so bemerkt man die sonderbaren Gestalten, welche in Fig. 7, 8, 9 abgebildet sind. Sie sind wie abgedreht, und so symmetrisch und so schön von Aussen, dass man kaum begreifen kann, wie sie aus mechanischen Ursachen entstanden seyn mögen. Eine der Höhlungen, die mit den anderen nicht zusammenhängt, hat das Ansehen eines aufs schönste gezierten Scepters, wie Fig. 7 zeigt; jedoch liegen die verschiedenen Theile desselben in verschiedenen Ebenen, so dass sie wie eine Menge zerstreuter Linien aussehen, die Fig. 10 darstellt, wenn man sie in einer Richtung ansieht, die auf der, in welcher sie symmetrisch erscheinen, senkrechst steht.

Die Höhlungen AB (Fig. 6) konnten nur dann in die Lage bC gebracht werden, und die Flüssigkeit sich auf die Fläche ACB ergiessen, wenn die krystallisirte Masse ACB noch nicht ganz erhärtet war. Diese Behauptung hat hierin eine grosse Stütze, dass die Linie bC auf der Axe des Prisma senkrecht steht, und daher in der Ebene des deutlichsten Blätterdurchgangs liegt. Daher war die Flüssigkeit nach der Richtung des geringsten Widerstandes entwichen.

Das hier besprochene Mineral enthält eine Gruppe die aus einer grossen Anzahl paralleler Höhlungen besteht, die sehr symmetrisch angeordnet sind; eine dieser Reihen stellt Fig. 11 dar. Nimmt man nun an, dass die Flüssigkeit im Mineral vor dessen völliger

Erhärtung durch die Hitze stark ausgedehnt war, so musste die Flüssigkeit in einer Höhlung auf die in der anderen nahen einen Druck ausüben, und auf diese Art eine Reihe von Höhlungen zu einer einzigen werden, ähnlich der in Fig. 9 abgebildeten. Liegen die Höhlungen in verschiedenen Ebenen, wie dieses Fig. 10 zeigt, so suchte die ausgedehnte Flüssigkeit zu der unmittelbar unter ihr liegenden hinabzusteigen, und sich mit ihr zu verbinden. Dadurch soll nicht gesagt seyn, dass die Höhlung bC in Fig. 6 auf diese Art entstanden sey, denn dieses macht der Umstand unwahrscheinlich, dass sie mit der geraden AB verbunden ist, sondern es soll dadurch nur das Entstehen der Gestalten Fig. 7, 8, 9 durch Vereinigung vieler wie Fig. 11 angeordneter Höhlungen erklärt werden.

Sind die Höhlungen regelmässig krystallisirt, so sind ihre homologen Flächen mit einander, und mithin auch mit der Haupt- oder secundären Gestalt des Krystalls parallel. In einigen sehr sonderbaren amorphischen Stücken von brasilianischem Quarz endigen sich diese hohlen Krystalle in sechsseitigen Pyramiden mit stumpfer Spitze, und die Axe dieser Pyramiden ist mit der des Krystalls parallel.

3.

Ueber die Beschaffenheit der Flüssigkeiten in den Höhlungen.

Nach dem Vorausgeschickten bleibt nur wenig über diesen Gegenstand zu sagen übrig. In einigen Quarzkrystallen scheint die Flüssigkeit, selbst bei der gewöhnlichen Lufttemperatur, eine sehr bedeutende

Spannkraft zu besitzen, und oft reicht nur eine geringe Erwärmung hin, das Mineral zu zersprengen.

Einen merkwürdigen Fall der Art erfuhr Sanderson, der einen Quarzkrystall von Quebek in den Mund nahm. Die geringe Temperaturerhöhung reichte hin, den Krystall zu zerreissen, und ihm den Mund zu verwunden. Die daraus hervortretende Flüssigkeit hatte einen sehr unangenehmen Geschmack.

In den schon früher von Brewster beschriebenen Höhlungen verwandelte sich die ganze Flüssigkeit, wenn sie erwärmt wurde, in Dünste, oder blieb tropfbar flüssig, wenn sie die Höhlung ausgefüllt hatte. Seit dieser Zeit entdeckte er aber Höhlungen, in denen man nach der Erwärmung so zu sagen drei verschiedene Substanzen bemerkte, nämlich die ausdehnbarere (expansible) im flüssigen Zustande, die dichte, und die Dünste der ausdehnbareren Substanz. Dieses sonderbare Factum wird durch die Fig. 12 erläutert, die eine Höhlung eines Minerals vorstellt, welche $\frac{1}{12}$ Z. lang ist. Die expansivere Flüssigkeit befindet sich in NN und N′N′, wo sich die grossen Höhlungen V und V′ befinden; n ist ein flüssiges Kügelchen ohne Höhlung. Wie man das Mineral erwärmt, löset sich die Flüssigkeit in NN und N′N′ in Dünste auf, der Antheil n dehnt sich zu einem elliptischen Kügelchen aus, dessen Kraft aber nicht hinreicht, um die zweite Flüssigkeit zwischen n und N, und n und N′ zu vertreiben, sondern durch die Expansivkraft der Dünste in NN und N′N′ im Gleichgewicht erhalten wird. In einer Topasplatte, wo die expansivere Flüssigkeit aus zwei Theilen besteht, die in der dichten Flüssigkeit schwimmen, ist ein Theil ein sphärischer Tropfen, der sich

in der Wärme ausdehnt, und in der Kälte zusammenzieht, und im durchgelassenen Lichte eine Wirkung hervorbringt, die der ähnlich ist, welche man sieht, wenn man die Pupille öffnet und schliesst.

Bei der abermaligen Untersuchung der zweiten oder dichten Flüssigkeit bemerkte Brewster mehrere sonderbare Thatsachen. Er hatte vorläufig bemerkt, dass die Verbindungs-Canäle zweier Höhlungen mit der dichten Flüssigkeit angefüllt sind, die ihre Lage ändert, wenn durch Wärme das Gleichgewicht der anliegenden Theile geändert wird. Die Theile dieser Flüssigkeit ziehen sich einander stark an, wie die des Wassers und werden auch stark vom Mineral angezogen. Die Theile der expansiveren Flüssigkeit ziehen sich und das sie einschliessende Mineral hingegen nur schwach an. Daraus folgt, dass die dichtere Flüssigkeit von den Ecken der Höhlung angezogen wird, sich an die Wände derselben anlegt und die Verbindungs-Canäle der Höhlungen anfüllt. Die expansivere Flüssigkeit hingegen erfüllt alle weitere Räume und schwimmt in grösseren und weiteren Theilen der Höhlungen auf der dichten.

Erwärmt man eine einzelne tiefe Höhlung, die beide Flüssigkeiten enthält, so muss die Spannkraft der ausdehnbareren, nachdem sie ihren Raum ausgefüllt hat, die Form der dichteren modificiren, indem sie selbe von einigen Ecken heraus und in andere hinein presst, bis sie mit der Kapillarität in ein Gleichgnwicht gekommen ist.

Wenn zwei Höhlungen mit einander communiciren, wie A und B in Fig. 13, so werden die punctirten Stellen von der expansiveren Flüssigkeit einge-

nommen, die dichte hingegen wird sich im Canale mn und in den Ecken o, p, r, s, befinden. Gesetzt es sey in der kleineren Höhlung B eine leere Stelle V und es werde das Mineral erwärmet, so wird die grössere Ausdehnung der expansiveren Masse in A, die keine Leere auszufüllen hat, die dichte Masse mn gegen V zu treiben, und in die Lage bcm bringen, wenn die Expansivkräfte ins Gleichgewicht gekommen sind. Ist aber A sehr gross gegen B, so wird die Flüssigkeit mn nach den Ecken o und p hingetrieben, und von da beim Abkühlen wieder in die Lage mn zurückkehren.

Steht die Höhlung A mit anderen in Verbindung, so kann es geschehen, dass bei der Erwärmung die dichte Flüssigkeit mn vertrieben wird und wieder zurückkehrt und so den Weg bald öffnet, bald schliesst, wie eine Klappe. Dieses zeigte sich an einem Topas-Krystalle, dessen Höhlungen Fig. 14 bei ABCDE vorstellt. Bei der gewöhnlichen Temperatur zeigt sich ein leerer Raum V in der expansiveren (punctirten) Flüssigkeit, die dichtere, (schattirte) nimmt die Ecken bc, de, DE und auch F ein. Erwärmt man das Mineral mit der Hand, so kann sich die Flüssigkeit in den Armen VC und VD nach V hin ausdehnen. Da aber bei AB, B und EF keine solchen Räume sind, so muss die Flüssigkeit in ihnen die dichtere vertreiben. Die in ED befindliche begibt sich nach D und die bei bc nach de, bis sie bei grösserer Anhäufung von der nahen Ecke mnop angezogen wird. Hier überzieht es zuerst die inneren Flächen der Ecke, wegen ihrer Anziehung zum Topas, dieser Ueberzug wird immer dicker und bildet die Wulste zwischen

o und p und zwischen m und n, welche sich endlich vermög ihrer gegenseitigen Anziehung zur Säule mnpo vereinigen. Nun ist die Säule bc der dichten Flüssigkeit gänzlich verschwunden, und der Raum ABCD ist mit der expansiveren angefüllt. Fährt man mit der Erwärmung mittelst der Hand fort, so treibt sie die Flüssigkeit AB durch den kleinen Cylinder der dichten Masse de, die aber augenblicklich wieder ihren Platz einnimmt. Da aber dieselbe Wärme auch die Flüssigkeit zwischen np und C afficirt, die einen Theil der dichten Masse mnop vertreibt, so bewegt sich diese Masse und der Ueberschuss von der, welche von bc vertrieben wurde längs der Seiten der Höhlung hin, und nimmt den Theil qr des Armes VD ein. Manchmal wird die dichte Masse von mnop ganz vertrieben und gibt einen Theil an das Ende C ab, doch bleibt im Allgemeinen in jeder Ecke mo nur eine sehr kleine Portion.

Wird der Krystall wieder kalt, so verlässt die dichte Flüssigkeit mn und qr, geht nach und nach durch de nach bc und alles nimmt die ursprüngliche Lage wieder an.

Eine sonderbare Modification dieser Wirkungen bemerkte man in einer Höhlung eines Minerals, das sich Fig. 15 darstellt. Der Arm bV hat einen leeren Platz V, während die Höhlung A keinen derselben hat. Bei der gewöhnlichen Temperatur erscheint die dichte Flüssigkeit in a und c, und nur wenig in o und b, wo sie den engen Canal o b ausfüllt. Wendet man eine Erwärmung an, so füllt die Flüssigkeit in bV den Raum V aus, und weil die Höhlung Aaoc keinen derselben hat, so wird ein Theil ihrer Flüs-

sigkeit durch ab nach bV in Form kleiner Kügelchen getrieben. Beim Abkühlen kann man das Zurückkehren der Flüssigkeit von A nach bV wohl sehen. Die Zusammenziehung der Flüssigkeit in A macht, dass die dichte Flüssigkeit so wie die in mno (Fig. 15) erscheint, und bald wird die krumme Oberfläche mn mehr flach und zuletzt gar gerade wie in Fig. 16 Dieses zeigt einen Druck längs des Canals b′o′ nach der Richtung b′o′ an, ein Kügelchen der flüchtigen Flüssigkeit geht von o′ aus, geht durch die dichte Flüssigkeit und sammelt sich in A′. Nachdem deren drei oder vier diesen Weg genommen haben, ist das Gleichgewicht wieder hergestellt. In diesem Falle ist die Capillarkraft, welche die Wände des Canals auf die in ihm enthaltene Flüssigkeit ausüben, zu stark als dass sie den kleinen Kügelchen der flüchtigen Flüssigkeit in b′V′ erlaubte, ihren Platz zu ändern wie in Fig. 14.

Die flüssigen Klappen, so kann man sie wohl nennen, welche die verschiedenen Arme der Höhlungen von einander trennen, geben Anlass zu Speculationen über die Functionen thierischer und vegetabilischer Körper. In den grösseren Organen der gewöhnlichen Thiere muss die Schwere die Capillarität überwältigen oder wenigstens modificiren, aber in den feineren, besonders bei microscopischen Thieren, ist die Schwere von der Capillaranziehung völlig überwältigt, und daher wird es wahrscheinlich, dass Flüssigkeiten durch solche Klappen von einander getrennt erhalten werden. — Doch hierüber mögen Physiologen urtheilen.

4.

Ueber einige Erscheinungen, betreffend die Bildung der Höhlungen mit Flüssigkeiten.

In einem früheren Aufsatze hat Brewster auch die Phänomene beschrieben, welche eine Flüssigkeit in verschiedenen natürlichen und künstlichen Metallen darbietet. Er behauptet, seit dem mehrere Krystalle gesehen zu haben, doch bestand die Flüssigkeit immer aus Wasser und both daher nichts Merkwürdiges dar. In einem Minerale aber, das Brewster zur Untersuchung übergeben ward, fand er folgende Merkwürdigkeit: In der Zeichnung 17 stellt AB eine Höhlung in Quarz vor, die mit Ausnahme von ab ganz mit einer Flüssigkeit angefüllt ist. Die Flüssigkeit dehnt sich in der Wärme nicht stark aus, ist also wahrscheinlich Wasser, jedoch wenn man den Krystall schüttelt, wird sie trübe und weisslicht, welches von einem Sedimente herkommt, das sich in den untern Theilen der Höhlung abgesetzt hat.

In einem Quarzkrystall von Brasilien befindet sich eine Höhlung mit einer Luftblase, die über $\frac{1}{10}$ Z. lang ist. Ein Drittel davon ist mit einem weissen Pulver angefüllt, das aus krystallisirten Theilen besteht, die beim Umwenden des Minerals über der Oberfläche der Luftblase hinfliessen. In den vorhin erwähntem Quarzstück mit Höhlungen, die pyramidalisch zugespitzt sind, befindet sich nur eine Flüssigkeit, und in dieser ist meistens eine Luftblase. Die Höhlungen enthalten oft undurchsichtige Kügelchen, die gegen $\frac{1}{937}$ Z. im Durchmesser haben und

sich deutlich bewegen; in einer Höhlung zählte Brewster zehn derselben, deren sieben herumrollten, wenn man den Krystall drehte. In einem anderen Quarzstücke sind solche Kügelchen allenthalben vertheilt, wieder in einem anderen kommen sie in der Nähe der Gipfel der pyramidalen Höhlen vor, und zwar sind einige innerhalb, andere ausserhalb der Höhlung.

Bei der Krystallisation des Eises kommen einige Phänomene vor, die mit dem Vorhergehenden in genauer Verbindung stehen. Friert Wasser in einem gläsernen Gefässe, so ist oft das Eis durch Gruppen von Höhlungen unterbrochen, die dieselbe Gestalt und dasselbe Aussehen haben, wie die in Mineralien. Brewster fand oft gefrorne Thautropfen, die eine Portion Wasser enthielten, das bei der minderen Temperatur nicht gefroren war, einige Eiskrystalle zeigten ihm dasselbe unter noch merkwürdigeren Umständen. Am Morgen des 8. Octobers 1825 trat in Roxburghshire ein scharfer Frost ein. Der Weg im Garten war durch das schnelle Gefrieren des mit Sand vermengten Wassers um mehr als 1 Zoll über seine natürliche Lage erhöht. Alle diese erhöhten Theile bestanden aus verticalen, sechsseitigen Eisprismen, deren Spitzen dreieckig zu seyn schienen. Die Pflanzen waren mit körnigen Krystallen bedeckt, die im Allgemeinen sechsseitige Tafeln vorstellten.

Bei der Untersuchung der prismatischen Krystalle mittelst eines Microscops zeigten sich mehrere interessante Thatsachen. Sie hatten sehr viele Höhlungen der kleinsten Art, die sich in Reihen parallel mit der Axe des Krystalles, und in so gleichen Ent-

fernungen von einander befanden, wie gleichweit abstehende mathematische Puncte. Einige derselben waren lang und flach, andere ohne regelmässige Gestalt, sie enthielten aber im Allgemeinen Wasser und Lnft.

Mittelst eines stark vergrössernden Mioroscops zeigten sie sich, wie Fig. 18 darstellt, wo ABC das Eis angibt, in dem sich eine lange Höhlung mo mit Wasser und Luft befindet. Das Eis löste sich nach und nach auf, und als das Ende no der Höhlung mn der äusseren Fläche des Eises nahe war, löste sich die Luft in no selbst ab, und ging so durch das Eis heraus. Dieses Phänomen ist dem Durchgange der flüchtigen Flüssigkeit durch Topas und Quarz, wie er oben angegeben wurde, ähnlich; in einem Falle fand die Luft, im anderen die Flüssigkeiten den Ausweg an der Stelle in der Richtung, wo die Spaltung am leichtesten geschieht.

Das Sonderbare an der Sache ist aber, dass der Raum on, der die Luft verlassen hatte, alsogleich vom Eise angefüllt, und die Höhlung auf mn reducirt war.

Da die Bildung des Eises der anderen Krystalle aus Substanzen, die durch Hitze flüssig gemacht sind, ganz ähnlich ist, so kann die Untersuchung seiner Höhlungen einiges Licht über die Bildung der Mineralkörper verbreiten.

Nachdem Brewster diesen Aufsatz, der in Extenso im zehnten Bande der Edinburger Transactions erscheinen wird, vollendet hatte, zeigte ihm W. Nicol einen Krystall aus schwefelsaurem Baryt, in welchem sich Höhlungen von derselben Art befan-

den, wie die, welche vorher beschrieben wurden; doch waren sie breiter als alle, die Brewster gesehen hatte. Diese wurden geöffnet, und die Flüssigkeit floss über die Spalte herab. In diesem Zustande legte Nicol den Krystall in sein Kabinet. Als er ihn nach 24 Stunden wieder ansah, bemerkte er, dass jeder Tropfen der Flüssigkeit in einen Schwerspathkrystall umgewandelt sey, der die primitive Form des Minerals hatte.

Diese Krystalle nahmen so viel Raum ein, als der ganze Tropfen betrug, und waren also nicht aus einer wässerigen Schwerspathlösung abgesetzt. Es scheint demnach, als hätte nur der Druck, welchem die Flüssigkeit ausgesetzt war, die Krystallisation verhindert.

V. Untersuchungen über den Einfluss der Temperaturänderungen auf die Berührungselectricität und deren Anwendung auf Bestimmung hoher Temperaturen von Becquerel.

(Annales de Chemie etc. April 1826. p. 371. Gelesen in der k. Akademie der Wissenschaften am 13. März 1826)

1.

Verfahren, mit dessen Hülfe man die Intensität eines electrischen Stromes messen kann.

Die electro-chemische Theorie, so wie sie die meisten berühmten Chemiker annehmen, nimmt als

feststehende Thatsache an, dass zwei Körper, die sich mit einander verbinden, durch Berührung in zwei entgegengesetzte electrische Zustände versetzt werden, dass der, welcher in der Verbindung die Stelle der Säure vertritt, negative, der das Alkali ersetzt, positive Electricität bekommt, dass die Intensität dieser electrischen Spannung mit der Temperatur bis zum Augenblicke wächst, wo die Vereinigung eintritt, dass aus der Vereinigung der zwei Electricitäten das Feuer entsteht, und hierauf alle electrischen Phänomene verschwinden.

Von dieser Theorie ist nur die Electricitätserregung der sauren und alkalinischen Körper durch die Erfahrung bewiesen, und man weiss gar nicht, was vorgeht, wenn sich die Temperatur derselben ändert. Gewiss hat der Zustand der Wissenschaft zur Zeit, wo diese Theorie aufgestellt wurde und die Schwierigkeit, die seitdem entdeckten Phänomene zu messen, die Auflösung dieser Fragen verhindert, deren Wichtigkeit für die electro-chemische Theorie so gross ist. Die Phänomene der Electricität, es mag diese im Zustande der Ruhe oder der Bewegung seyn, sind immer schwer zu messen, weil sie so viele Ursachen zu modificiren suchen, die man oft schwer beseitigen kann, und doch ist die Auflösung einer Frage nicht vollständig, so lange man die beobachteten Erscheinungen nicht messen kann.

Vor Coulombs schönen Entdeckungen war der auf Erfahrung beruhende Theil der Electricitätslehre schon sehr vorgerückt und doch hatte man noch kein Mittel, die Phänomene zu messen, man konnte nicht einmal die Stärke der Einwirkung zweier elec-

trischer Körper auf einander bei verschiedener Entfernung derselben dem Masse nach vergleichen und doch sollte dieses der erste Schritt zu einer mathematischen Theorie der Electricität seyn. Diesem geschickten und unermüdeten Physiker verdanken wir die Kenntniss der Apparate, wodurch man neue Eigenschaften des electrischen Fluidums entdeckte, auf die einer unserer berühmtesten Mathematiker (Poisson in Mem. de l'Iinst. 1812) die Analyse anwendete und dadurch der Schöpfer der Statik der Electricität wurde.

Seit Coulomb's Zeiten hat die Electricität grosse Fortschritte gemacht, die Entdeckungen Volta's, Oested's und Amperes haben die Grenzen der Wissenschaft erweitert, und doch kann man die meisten dahin gehörigen Phänomene, besonders die, welche sich auf die Entwickelung der Electricität beziehen, noch nicht genau messen. Untersuchungen hierüber müssen für die Wissenschaft ein Interesse haben und das ist auch der Grund, welcher mich vermochte, die Arbeit zu unternehmen, die ich der Akademie vorzulegen die Ehre habe.

Ich will zuerst das Verfahren beschreiben, dessen ich mich bediente, um die Stärke der durch einen electrischen Strom erzeugten electro-dynamischen Kraft zu messen, wenn dieser Strom durch einen Galvanometer (Schweigger'schen Multiplicator) geht, in dem sich zwei miteinander verbundene Magnetnadeln befinden, wie sie Ampère angab. Eine in Grade getheilte Glasplatte gibt die Ablenkung einer dieser Nadeln an. Es handelt sich nun zuerst darum, das Verhältniss zwischen diesen Ablenkungen und den ih-

nen entsprechenden electro-dynamischen Kräften zu finden. Man hat angenommen, dass die Stärke einer solchen Kraft dem Sinus des Ablenkungswinkels proportionirt sey; aber dieses stützt sich auf keine Erfahrung, sondern ist nur aus der Zusammensetzung von Kräften, die senkrecht auf der Richtung des electrischen Stromes stehen, entnommen. Ich habe nicht die Absicht dieses Gesetz zu finden, sondern die Intensität eines Stromes zu suchen, der einer gegebenen Ablenkung entspricht.

Wendet man zwei unveränderlich und in paralleler Richtung mit einander verbundene Magnetnadeln, deren ungleichnamige Pole nach derselben Weltgegend gerichtet sind, am Galvanometer so an, dass eine innerhalb, die andere ausserhalb desselben sich befindet, so hat man den Einfluss des Erdmagnetismus grösstentheils aufgehoben und es bleibt keine andere Richtkraft übrig, als die, welche nöthig ist, damit die Nadeln wieder in ihre alte Lage zurückkehren, wenn man sie davon entfernt hat. Die Empfindlichkeit dieses Apparates ist so gross, dass die Magnetnadel, wenn man sie über einer messingenen getheilten, mit einem Querstück von demselben Metall versehenen Scheibe oscilliren lässt, sich immer in der Richtung dieses Querstückes in Ruhe stellt. Desshalb brauche ich eine gläserne Scheibe. Ich nehme ferner zum Galvanometer statt eines einzigen Fadens von Kupfer drei von demselben Metall, die sich an Länge und Dicke gleichen, auf einerlei Weise mit Seide übersponnen, und gewunden sind. Leitet man durch jeden einzelnen Draht dieselbe Electricitätsmenge, so hat man offenbar drei vollkommen glei-

che Ströme, und die dadurch hervorgebrachte Ablenkung gilt dreimal mehr als die, welche ein Strom erzeugt. Aendert sich die Menge der Electricität, die jeden Draht durchströmt, so kann man auf diesem Wege eine Reihe von Beobachtungen erhalten, nach denen man eine Tafel zu construiren im Stande ist, in welcher die jedem electrischen Strome entsprechende Ablenkung der Magnetnadel angegeben ist.

Um sich electrische Ströme von gleicher Intensität zu verschaffen, löthe man an die beiden Enden jedes Kupferdrahtes einen Eisendraht, so dass man drei geschlossene Ketten erhält, krümme jede dieser Ketten an jeder Löthstelle auf gleiche Weise, um das gekrümmte in eine einerseits geschlossene Glasröhre schieben und in ein Quecksilberbad tauchen zu können, dessen Temperatur man mittelst einer Weingeistlampe erhöht. Ein auch in das Quecksilber gesenktes Thermometer zeigt die Variationen der Temperatur an. Seebek hat gezeigt, dass die Magnetnadel nach Massgabe der Erwärmung von der Lage ihres Gleichgewichtes abgelenkt wird; unterwirft man daher nach und nach eine Löthstelle, dann zwei etc. dem Versuche und merkt für jeden Fall bei derselben Temperatur die Ablenkung der Magnetnadel, so lernt man die Winkel kennen, die einer einfachen, doppelten etc., Kraft entsprechen.

Soll man aber auf diesem Wege vergleichbare Resultate erhalten, so muss man die grösste Vorsicht brauchen. Zuerst muss man die Löthstelle, welche nicht erwärmt wird, in schmelzendes Eis eintauchen, die Dicke der Glasröhre, worin sich die andere befindet, soll nahe der des Thermometers gleich seyn,

um in beiden zugleich dieselbe Temperatur zu haben, Die Erfahrung lehrt, dass ein Quecksilberbad wegen der grösseren Leitungsfähigkeit für die Wärme einem Oehlbade vorzuziehen sey; auch dürfen die Dräh-te im gekrümmten Theile, der erwärmt wird, keinen anderen Berührungspunct haben, als wo sie zusammengelöthet sind, um nicht etwa die Stärke des Stromes zu modificiren. Desshalb umwickelt man sie auch mit Seide. Um endlich an der Löthstelle und im Thermometer einerlei Temperatur zu haben, erhöht man diese nahe bis an den Punct, wo der Versuch gemacht werden soll, und nimmt dann schnell die Lampe weg. Da bleibt nun die Temperatur einige Secunden stationär, und man ist der Gleichheit der Temperatur im Thermometer und in der Löthstelle sicher. Durch dieses Verfahren erhielt ich folgende Resultate:

Temperaturen	Ablenkung der Magnetnadel			
	mit 1 Draht	mit 2 Dräht.	mit 3 Draht.	mit 4 Dräht.
10°	1°.30	2°.60	3°.90	5°.20
20	2 .60	5 .30	7 .80	10 .10
30	4 .00	7 .65	10 .55	13 .25
40	5 .40	10	13 .35	16 .50
50	6 .65	11 .75	15 .40	19 .40
60	7 .90	13 .50	17 .50	21 .50
80	10 .30	16 .50	21 .00	25 .00
90	11 .10	17 .65	22 .35	26 .00
100	11 .90	18 .80	23 .75	28
110	12 .55	19 .90	25 .60	29 .17
120	13 .20	21 .00	26 .50	30 .35
130	14 .00	22	27 .30	31 .17
140	14 .75	23	28	32 .00
160	15 .50	24	29 .40	33 .25
200	16 .90	25	30	35 .25
300	17 .80	26 .50	31 .10	—

Man sieht hieraus, dass innerhalb 0° und 10° die Ablenkungen der Zunahme der Wärme proportionirt sind, dass aber dieses Verhältniss über diese Grenze hinaus nicht mehr Statt findet.

Setzt man nun, die Ablenkung von 1°.30 sey einer electro-dynamischen Kraft 2 gleich, so wird die Ablenkung bei 2°60 einer Kraft 4 und die von 3.90 einer Kraft 6 entsprechen etc. Fährt man mit dieser Schlussweise fort, und setzt jeder Ablenkung die Zahl gegenüber, die ihr entspricht, so erhält man, in der Voraussetzung, dass bei derselben Temperatur die Kraft mit der Anzahl der Ketten im geraden Verhältnisse steht, folgende Tafel:

Temperaturen	1 Draht		2 Drähte		3 Drähte		4 Drähte	
	Ablenkung	Kraft	Ablenkung	Kraft	Ablenkung	Kraft	Ablenkung	Kraft
5°	0°.65	1	1°.30	2	1°.95	3	2°.60	4
10	1 .30	2	2 .60	4	3 .90	6	5 .20	8
15	1 .95	3	3 .95	6	5 .85	9	7 .60	12
20	2 .60	4	5 .30	8	7 .80	12	10 .10	16
30	4 .00	6	7 .65	12	10 .55	18	13 .25	24
40	5 .40	8	10 .00	16	13 .35	24	16 .50	32
50	6 .85	10	11 .75	20	15 .40	30	19 .00	40
60	7 .90	12	13 .50	24	17 .50	36	21 .50	48
70	9 .00	14	15 .00	28	19 .25	42	23 .25	56
80	10 .30	16	16 .50	32	21	48	25 .00	64
90	10 .90	18	17 .65	36	22 .50	54	26	72
100	11 .90	20	18 .80	40	24 .00	60	28	80
110	12 .55	22	20 .00	44	25 .30	66	29 .15	88
120	13 .20	24	21 .20	48	26 .50	72	30 .10	96
130	14 .00	26	22 .10	52	27 .30	78	31 .17	104
140	14 .75	28	23 .00	56	28 .30	84	32	112
150								
160	15 .50	30	24	60	29 .40	90	33 .25	120
180								
200	16 .90	32	25	64	30	96	35 .15	128
250								
300	17 .80	36	26 .50	72	31 .21	108		

Die Zahlen, welche die Ablenkung der Magnetnadel ausdrücken, sind die mittleren arithmetisch proportionirten aus einer grossen Anzahl von Versuchen. Bei den Zahlen, welche die Intensität des electrischen Stromes ausdrücken, sind die Brüche weggelassen, weil ihnen ohnehin nur Decimaltheile von Ablenkungen entsprechen.

Der zweite Theil enthält die nöthigen Data zur Vergleichung der electro-dynamischen Kräfte, die eine Ablenkung hervorbringen, welche nicht 35° übersteigt; man darf aber nicht glauben, dass diese Resultate für alle Apparate gelten, denn das Verhältniss zwischen der Ablenkung und der electrischen Kraft ändert sich mit der Einrichtung, Gestalt und Empfindlichkeit des Apparates, und muss für jeden derselben eigens bestimmt werden.

Nun ist es leicht einzusehen, was in einer Kette erfolgen muss, die aus zwei Kupfer- und Eisendrähten besteht, die mit den Enden zusammengelehnt sind, und in denen jede Löthstelle eine andere Temperatur hat. Der erste Theil der hier folgenden Tafel enthält die Resultate, die hervorgehen, wenn man abwechselnd die Temperatur einer Löthstelle von 0° bis 250° erhöht, während die der anderen beständig = 0° ist, der zweite und dritte diejenigen, welche man erhält, wenn man die Löthstelle, welche vorher die Temperatur = 0° hatte, auf 50° auf 100° erhöht.

Temperaturen.		Ablenkung der Magnetnadel.	Stärke der electro-dynamischen Kraft.
1. Löthstelle.	2. Löthstelle.		
50°	0		
100	—	7.15	11
150	—	12.75	22
200	—	16.00	31
250	—	18.00	37
300	—	19.00	40
50	50	—	—
100	—	7.25	11
150	—	11.75	20
200	—	14.00	26
250	—	15.25	29
30	—	16	30.50
50	—	—	—
100	100	—	—
150	—	6	9
200	—	9.50	15
250	—	11	18
300	—	—	—

Man sieht hieraus, dass die electro-dynamische Kraft 11, welche bei den Temperaturen 100 und 50 hervorgebracht ist, der Differenz der Kräfte 22 und 11 gleicht, welche bei den Temperaturen 100 und 50 an derselben Löthstelle hervorgebracht wurden. Eben so ist die Kraft 20 gleich der Differenz der Kräfte, welche bei den Temperaturen 150° und 50 erzeugt wurden, und die Kraft 9 gleich der Differenz der bei den Temperaturen 150 und 100 hervorgerufenen Kräfte.

Hieraus kann man die allgemeine Regel abnehmen, dass in einer Kette aus zwei Metallen, die an ihren Enden an einander gelöthet sind, die Intensität der electro-dynamischen Kraft, welche aus der Temperaturverschiedenheit der einzelnen Löthstellen hervorgeht, dem Unterschiede jener Kräfte gleich sey, die successiv durch jede dieser Temperaturen hervorgerufen wird, wenn eine Löthstelle diese, die andere die Temperatur = o hat, keineswegs aber der Kraft, welche durch die Temperaturdifferenz allein hervorgebracht wird. Ueber die Genauigkeit dieser Resultate wird man keinen Zweifel erheben können.

Da nun der electrische Zustand jeder Löthstelle von ihrer Temperatur abhängt, und nicht von der der angränzenden Theile, so kann man sich eine Tafel wie die zweite construiren, ohne vier Drähte anwenden zu dürfen. Ich habe vier Kupfer- und eben so viele Eisendrähte von 5 Decimeter (19 Z.) Länge und $\frac{1}{3}$ Millimeter Dicke mit ihren Enden abwechselnd aneinander gelöthet, so dass auf Eisen immer Kupfer folgte, und sie mit den zwei Enden des vorhin besprochenen Apparates verbunden, dann abwechselnd eine, zwei etc. Löthstellen gleich stark erwärmet, jedoch so, dass der electrische Strom in allen dieselbe Richtung hatte, und auf diese Weise eine einfache, doppelte, dreifache etc. electro-dynamische Kraft erhalten.

2.

Gesetze, welche die Berührungselectricität befolgt, wenn die Temperatur jedes Metall auf gleiche Weise ändert.

Es ist nach dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft unmöglich, die absolute Menge der Electricität zu bestimmen, welche sich bei der Berührung zweier Metalle entwickelt, oder wenigstens die aus der Berührung desselben Metalls mit mehreren anderen hervorgehende zu vergleichen. Dazu würde erfordert, dass man beide Metalle mit einem guten Leiter der Electricität verbinden könnte, der keine electromotorische Kraft auf sie ausübt; aber mit Hülfe des vorausgegangenen kann man erkennen, welche Modificationen der electrische Zustand, den zwei Metalle von der Temperatur = o erleiden, wenn man ein Metall erwärmt oder das andere erkältet. Dieses ist der einzige Weg, auf dem man kennen lernt, was mit der Contactelectricität bei der Erwärmung bis zum Momente der Verbindung der Metalle vorgeht.

Es wurde aus verschiedenen Metallen eine Kette gebildet, an der auch der Draht des vorhin besprochenen Apparates Theil nahm, und alles so eingerichtet, dass die beiden Enden mit demselben Metalle communicirten, und dadurch seine Wirkung auf die zu untersuchenden Körper aufzuheben, dann die Temperatur erhöht und verfahren, wie vorhin gesagt wird.

Auf diesem Wege erhielt man folgende Resultate:

Metalle.	Temperatur.	Ablenkung.	Stärke des electrischen Stromes.	Differenzen in der Stärke	
				beobachtete	berechnete
Eisen in Berührung mit Kupfer	50	7.50	11	11	
	100	12.25	22	9	
	150	16.00	31	3	
	200	17.25	34	3	
	250	18.10	37		
Gold	100	11.00	18	6	
	150	13.50	24	3	
	200	14.50	27	3	
	250	15.50	30		
	300	—	—		
Silber	40	5.80	8.50	7.50	
	80	10.00	16.00	6	
	120	12.50	22.00	—	
	140	—	—	—	
	200	15.75	30	—	
	250	—	—		
Platin	40	6.50	10	10	
	80	11.50	20	10	
	120	15.10	30	9	
	160	18.50	39	10	
	200	21.60	50	10	
	250	24.00	60	9	
	300	25.50	69		
Platin in Berührung mit Blei	50	1	1.50	—	—
	100	2.00	3 00	3	3
	150	3.75	6.00	4 50	4.25
	200	7.00	10.50	5.50	5.50
	250	10.00	16.00	7.00	6.75
	300	12.75	23		
Zink	50	2	3	3	
	100	4.50	6.7	3 7	3.4
	150	8	12	5.5	5.5
	200	11.50	19.00	7.00	7.6
	250	14.75	28.00	9.00	9.7
	300	19	70	12	11.80

Metalle.	Temperatnr.	Ablenkung.	Stärke des electrischen Stromes.	Differenzen in der Stärke	
				beobachtete	berechnete
Platin in Berührung mit Kupfer	50	1.20	2	3	3
	100	3.15	75	4	4.40
	150	6.00	9	6	5.80
	200	9.50	15	7	7.20
	250	12.50	22	9	8.60
	300	14.00	31	7	
	350	18.75	40		
Gold und Silber	40	1.50	3	3	10.00
	80	3.50	6	3	—
	120	6.10	9	5	3
	160	8.50	14	4	4.10
	200	11.25	18	6	5.20
	240	13.75	26	6	6.00
	280	16.00	32	8	7.40
	320	18.50	40		8.50
Eisen	40	6.50	10	10	10
	80	11.50	20	10	10
	120	16.10	30	8	10
	160	18.10	38	11	5
	200	20.35	49	5	5
	250	22.35	54	6	
	300	24.10	60		
Palladium	40	3	5	—	
	80	8.25	12	8	
	120	11.80	20	8	
	160	15.00	28	8	—
	200	17.75	36	8	—
	240	20.25	44	8	—
	280	22.55	52		—
Kupfer in Berührung mit Silber	40	0.35	0.5		
	80	0.70	1.00		
	120	1.05	1.50		
	160	1.45	2.00		
	200	1.75	3		
	240	2.15	3.50		
	280	2.45	4.00		

Metalle.	Temperatur.	Ablenkung.	Stärke des electrischen Stromes.	Differenzen in der Stärke	
				beobachtete	berechnete
Kupfer in Berührung mit Zinn	50	0.50	1		
	100	1.25	2	1	
	150	2.50	4	2	
	200	3.80	6	2	
	250	5.00	8	2	
	300	—	—	—	
Blei	50	0.5	1	1	
	100	1.25	2	2	
	150	2.50	4	2	
	200	3.80	6	2	
	250	5.00	8		
Zink	50	1.25	2		
	100	2 75	4	2	2
	150	4.50	7	3	3
	200	7.	10.50	3.50	4
	250	9 50	15.00	4.50	5
	300	12	21.00	6	6
	350	14.50	27.00	6	7

Aus dieser Tafel sieht man, dass Eisen stets positiv ist mit Platin, Kupfer, Gold, Silber, und daher steigert die Temperaturerhöhung die electrische Wirkung der sich berührenden Metalle; denn sonst müsste die stärkste positive Electricität durch die niedrigste Temperatur erzeugt worden seyn, und der electritrische Strom hätte seine Richtung ändern müssen. Die durch Berührung des Kupfers mit den anderen oben angezeigten Metallen erregte Electricität wächst von 0° bis 140° in gleichem Verhältnisse mit der Temperatur; von 140° an nimmt dieser Wachsthum schnell ab und isi bei 300° kaum mehr merklich.

Diese merkwürdige Thatsache liess auch glauben, dass über diese Temperatur hinaus der electrische Strom seine Richtung ändert und in der That fand ich die Ablenkung nach entgegengesetzter Richtung, als ich die Schliessungsdrähte der Kette in eine Flamme hielt, um sie sehr zu erhitzen.

Gold, Silber verhalten sich bei der Berührung mit Eisen fast auf gleiche Weise, es hört nur in jedem die Proportionalität zwischen der Wärmezunahme und der electro-dynamischen Kraft bei einer anderen Temperatur auf.

Das Verhalten des Eisens in Berührung mit anderen Metallen, wenn seine Temperatur sich ändert, steht mit der electro-chemischen Theorie in offenbarem Widerspruche, weil diese voraussetzt, dass die electrischen Wirkungen mit der Temperaturerhöhung bis zum Augenblick der chemischen Verbindung steige.

Platin verhält sich in Berührung mit Kupfer, Gold, Silber, Blei, Zink und Palladium nicht so wie Eisen. Es bleibt bei jeder Temperatur negativ electrisch, daher wächst der electrische Strom mit der Temperatur, doch geht diese Zunahme nicht so vor sich, wie man glauben möchte. Von 0° bis 350° stehen die Differenzen der Zunahme der electrischen Kräfte für gleiche Temperaturzunahmen in einer arithmetischen Reihe.

Palladium befolgt dasselbe Gesetz. Auch Kupfer und Zink entziehen sich demselben nicht, auch bei ihnen wachsen die electrischen Wirkungen mit der Temperatur, und die Differenzen ihrer Zunahmen stehen in einer arithmetischen Reihe. Bei Kupfer in Berührung mit Zinn, Blei und Silber folget diese Zu-

nahme auf dieselbe Weise, weil sie aber schwach sind, so mögen immerhin Abweichungen Statt finden, welche der Apparat nicht angibt.

Die Verminderung der Temperatur bringt Wirkungen hervor, welche den durch Erhöhung derselben erzeugten analog sind. Ich nahm eine Kette aus zwei Drähten, wovon einer aus Kupfer, der andere aus Platin bestand, tauchte eine Löthstelle in schmelzendes Eis, die andere in eine Mischung aus Schnee und verdünnter Schwefelsäure, und erhielt folgende Resultate:

Temperaturen unter 0°.	Ablenkungen der Magnetnadel.	Berechnete Stärke der electro - dynamischen Kraft.	Beobachtete Stärke der electro - dynamischen Kraft.
4	2.60	4	3.4
8	4.70	7	6.8
12	7	10	10.2
16	8.50	13	13.60
20	10	16	17.00
24	12	20	20.40
28	13.50	25	23.80
32	14.75	28	27.20

Hier biethet sich von selbst die Frage dar, wie es kömmt, dass bei der innigen Verbindung, die man zwischen der Electricität durch Berührung und den chemischen Kräften annehmen zu müssen glaubt, diese Electricität bei der Temperaturerhöhung nicht schneller zunimmt und daher die electrische Action im Augenblick, wo die chemischen Kräfte so schnell wachsen, nicht stärker ist. Diese Frage dürfte schwer zu beantworten seyn. Ferner wie es kommt,

dass das Eisen in Berührung mit anderen Metallen bei der Temperaturerhöhung einen entgegengesetzten electrischen Zustand annimmt. Wahrscheinlich ist das Eisen nicht das einzige Metall, bei dem dieses Statt hat. Macht man aus verschiedenen Metallen electrische Ketten, so dass deren in jeder zwei verschiedene vorkommen, erhöht die Temperatur einer Löthstelle oder des Punctes, wo sie sich berühren, so findet man, dass die Metalle auf folgende Art sich an einander reihen, wobei jedes Metall gegen ein nachfolgendes negativ, gegen ein vorhergehendes positiv electrisch ist:

Wismuth	Silber
Platin	Kupfer
Quecksilber	Zink
Blei	Eisen
Zinn	Spiessglanz
Gold	

Man kann hieraus den Schluss ziehen, dass Zink und Kupfer, wenn sie in einer geschlossenen Kette vorkommen, durch gegenseitige Berührung einen electrischen Strom entstehen machen, der eine desto grössere Intensität hat, je höher die Temperatur ist.

Man könnte vielleicht glauben, dass die Temperaturerhöhung die Leitungsfähigkeit der Metalldrähte vermindere, und dass der Apparat desshalb nicht die ganze Zunahme der electro-dynamischen Kraft, die bei der Temperaturerhöhung eintritt, anzeigen kann; aber diese Meinung widerlegt die Erfahrung; denn arbeitet man bei mittleren Temperaturen, bei denen hinlängliche Wirkungen Statt finden, und lässt den einen Theil der Kette roth glühend werden, der von einer Löthstelle entfernt ist, so wird das Leitungsver-

mögen nicht um so viel schwächer, dass dadurch die Ablenkung geändert werden könnte. Diese Thatsache scheint mit Davy's Beobachtung im Widerspruch zu stehen, der fand, dass ein Leitungsdraht desto weniger Electricität durch sich gehen lässt, je mehr sich ein Theil der Kette der Rothglühhitze nähert; allein man kann sie mit ihm in Einklang bringen, wenn man bedenkt, dass Davy gezeigt hat, die kleinste Aenderung in der Leitungsfähigkeit eines Drahtes müsse die von ihm abgeleitete Electricitätsmenge abändern, wenn man eine so grosse Menge derselben in den Draht leitet, dass er sie nicht ableiten kann, während bei einer nicht so grossen Menge der Electricität die Verminderung der Leitungsfähigkeit darauf keinen Einfluss hat.

Es sind nun keineswegs die electrischen Wirkungen aller Metalle bei der Temperaturänderung untersucht worden; so delicate Versuche fordern mehr Zeit und Material, als mir zu Gebote stand. Ich wollte aber doch das, was ich fand, der Akademie vorlegen, weil es über die Phänomene, die mit den chemischen Wirkungen innig verbunden zu seyn scheinen, einiges Licht verbreitet.

3. Bestimmung hoher Temperaturen.

Aus dem Vorhergehenden hat man gesehen, dass die Electricität einer electrischen Kette aus Palladium und Platin, deren eine Löthstelle die Temperatur 0° hat, während die andere successiv bis 350° erhöht wird, für gleiche Wärmezunahmen um gleich viel wächst. Man kann leicht beweisen, dass diese Eigenschaft auch einer Kette aus zwei Platindrähten von

was immer für einem Durchmesser zukommt, die nicht aus einerlei Platin bestehen. Schneidet man einen Platindraht entzwei, und zieht einen Theil davon mittelst eines Zieheisens in einen dünneren Draht aus, verbindet dann wieder beide Stücke mit einander, indem man sie an den Enden über einander windet, bringt dann eine der beiden Verbindungen auf eine bestimmte Temperatur, so äussert sich keine electrische Wirkung; schmilzt man aber ein Stück irgend eines Metalles an einem Ende des Drahtes an, so zeigt sich alsogleich ein electrischer Strom, und dasselbe findet Statt, wenn die Kette aus zwei Drähten gebildet ist, die nicht aus demselben Platin bestehen. Es macht also die geringste Differenz im Platin beider Drähte einen electrischen Strom entstehen, wenn beide an der Berührungsstelle einerlei Temperatur haben. Die Drähte sollen aber vorläufig in kochende Salpetersäure getaucht seyn, um nicht in Gefahr zu kommen, dass fremdartige, am Platin hängende Körper diesen Effect hervorbringen.

Es scheint, als sey die Temperatur eines Körpers, bei welcher der Wachsthum der electrischen Kraft dem der Temperatur proportional zu seyn aufhört, desto höher, je höher der Schmelzpunct desselben liegt; da nun Platin nur bei sehr hoher Temperatur schmilzt, und bei dünnen Metallen das Gesetz der Abnahme nicht sehr schnell erfolgt, so kann man annehmen, dass in einer Kette aus zwei Platindrähten, die nicht von demselben Stücke sind, obige Proportionalität noch bei sehr hohen Temperaturen Statt findet, wenn sie von der Schmelzhitze weit entfernt sind. Diese Eigen-

schaft dient uns, um die Rothglühhitze durch eine Function aus Thermometergraden auszudrücken.

Ich will, um die Anwendung dieser Methode zu zeigen, die Temperatur bestimmen, welche zwei auf die angegebene Weise eingerichtete Platindrähte annehmen, wenn man successiv die Verbindungspuncte in verschiedene Stellen einer Weingeistflamme eintaucht.

Man weiss im Allgemeinen, dass eine Flamme, besonders die einer Kerze oder einer Weingeistlampe aus mehreren Abtheilungen besteht, wovon man leicht vier unterscheidet: 1) Die unterste blaue, die sich desto mehr verdünnt, je mehr sie vom Docht absteht. 2) Den dunklen Raum in der Mitte der Flamme. 3) Die helle Einfassung, welche letzteren umgibt und die eigentliche Flamme ausmacht; endlich 4) die wenig leuchtende Hülle der Flamme.

Hält man eine Verbindungsstelle beider Drähte in die obere Grenze der blauen Flamme, wo die mit Sauerstoff versehene Luft der Flamme zuerst begegnet, so findet man eine Ablenkung von 22°,50, taucht man sie in den weissen Theil, oder in die eigentliche Flamme, so beträgt die Ablenkung 20°, im dunklen Raume um den Docht nur 17°. Erhöht man die Verbindungsstelle auf 300°, so beträgt die Ablenkung 8° und entspricht der Kraft 12, woraus ich schliesse, dass die Kräfte in den drei vorhin erwähnten Stellen durch die Zahlen 54, 44, 32 und die Temperaturen durch 1350°, 1080°, 780° ausgedrückt werden, vorausgesetzt, dass 48 durch eine viermal grössere Kraft ausgedrückt wird. Es ist daher 1350° die höchste Temperatur, die ein Platindraht von $\frac{1}{5}$ Millim. Dicke in

einer Weingeistflamme annehmen kann, und diese entspricht genau der blauen Zone, welche den hellsten Theil der Flamme berührt, wo man auch sonst die grösste Wärme annahm. Die Temperatur 78° kann nicht die des Drahtes im dunklen Theil der Flamme nächst dem Dochte seyn, weil der Draht von der hellen Einfassung Wärme aufnimmt. Es ist diese Temperatur zu hoch.

Um mich von der Genauigkeit dieses Gesetzes zu überzeugen, welches mir zur Bestimmung der Temperatur der Theile einer Flamme oder des darin gehaltenen Drahtes diente, arbeitete ich mit Platindrähten von beliebigem Durchmesser, der aber kleiner war als $\frac{1}{3}$ Millim. und die nicht so viel Legirung enthielten, fand aber immer dieselben Resultate. Wäre dieses Gesetz nicht genau, so würde sich gewiss bei Drähten mit verschiedenen Legirungen eine Abweichung gezeigt haben. Die Vergleichung dieser Resultate mit den nach anderen Methoden erhaltenen können wohl zur Berichtigung der Ideen über eine so wichtige Frage beitragen.

Bei der Fortsetzung dieser Versuche wird man gewiss neue Eigenschaften entdecken, welche die gemachte Voraussetzung noch rectificiren werden, und so einen Ausdruck finden, wodurch hohe Temperaturen durch Functionen von Thermometergraden gegeben werden.

VI. Neue optische Instrumente.

1.

Ein neues reflectirendes Telescop von Dick.

(The Edinb. new philos. Journ. Nr. I. p. 41)

Dick hatte sich mehrere kleine Gregorianische Fernröhre construirt, und sich immer in seinen Erwartungen über ihre Wirkung getäuscht gefunden. Er änderte nach und nach den Bau dieser Instrumente ab, und so gerieth er auf folgende Einrichtung:

AB (Fig. 19) ist eine kurze Röhre, die den Hohlspiegel enthält, CD der Arm, der das Ocularstück trägt, und aus zwei Stücken von Mahagony besteht. D lässt sich längs C verschieben, und wird durch die Klammern E und F darangedrückt. An F befindet sich nach abwärts eine Schraubenmutter, in welche die Schraubenspindel ab passt, welche mittelst des Knopfes c umgedreht werden kann, und dazu dient, dem Oculare die gehörige Entfernung vom Spiegel zu geben. GH enthält die Oculare, wird durch den Stift d getragen, der selbst wieder durch eine Oeffnung in D geht, und sowohl aufwärts als abwärts geschoben, und in jeder Lage befestiget werden kann. Die Röhre GH ist, wie die zu einem kleinen achromatischen Erdfernrohre gehörigen, eingerichtet. Macht man sie wie zu einem astronomischen Fernrohr, so reicht sie nur bis J. Die Spiegel, welche Dick zu solchen Instrumenten anwendete, waren von Gregorianischen Fernröhren genommen, hatten also alle in der Mitte ein Loch. Das Ocular ward auf einen Punct des Spiegels nicht weit von diesem Loche gerichtet. Wenn

man dieses Instrument auf einen Gegenstand richten will, so bringt man das Auge nach H und sieht längs des Armes nach dem Ocularstücke hin, bis es mit dem Gegenstande zusammenfällt, und man hat meistens schon die rechte Stellung. Durch dieses Mittel lässt es sich gegen Saturn, Jupiter, und jeden anderen mit freiem Auge sichtbaren Planeten leicht stellen, wenn man eine 170 bis 180fache Vergrösserung daran anbringt. Bei starken Vergrösserungen aber ist es gut, einen Sucher, wie bei dem Newton'schen Telescope anzubringen.

Dick rühmt folgende Eigenschaften seines Fernrohres:

1. Es ist sehr einfach, und kann mit wenig Kosten gebaut werden; denn es hat statt der weiten und langen Röhre, wie sie bei Newtons und Gregoris Fernröhren gebraucht werden, nur ein kurzes 2—3 Z. langes Rohr, das den Spiegel enthält, und einen der Brennweite des Spiegels entsprechenden Arm.

2. Man kann damit Himmelskörper in einer grossen Höhe leichter beobachten, als mit einem anderen Telescope. Beobachtet man mit einem Gregorianischen oder einem achromatischen Telescope von 4—5 F. Länge ein Object, das 50 oder 60° über dem Horizonte steht, so muss der Körper des Beobachters eine sehr unbequeme Lage annehmen; mit diesem Fernrohre kann man dasselbe leisten bei einer Lage, als wenn man ein Buch läse, und desshalb 1—2 Stunden lang ohne Ermüdung denselben Körper ansehen, und allenfalls eine Zeichnung davon entwerfen. Um bei jeder Position des Körpers beobachten zu können, braucht man nur einen kleinen Tisch, der sich erhö-

hen und erniedrigen lässt, als Basis für das Instrument. Ist dieses 5—6 F. lang, und steht das zu beobachtende Object sehr hoch, so stellt man es auf den Fussboden, und stellt sich aufrecht vor dasselbe.

3. Dieses Instrument ist auch kürzer als ein Gregorianisches. Wendet man ein astronomisches Ocular an, so beträgt die gesammte Länge desselben nicht viel mehr als die Brennweite des Spiegels.

4. Es hat mehr Lichtstärke als ein Gregorianisches, weil es nur einen Spiegel hat, und desshalb nicht so viel Licht verliert, wie jenes.

5. Es zittert das Bild nicht so sehr, wie in einem Gregorianischen. Dieses Zittern kommt wahrscheinlich von der Elasticität des Trägers des kleineren Spiegels, der nur an einem Ende befestiget ist.

Dick hat versucht, ein solches Fernrohr mit einem halben Spiegel zu versehen, und sich überzeugt, dass ein solcher ohne besonderen Lichtverlust gewählt werden kann. Wollte man aber besonders auf Ersparung ausgehen, so könnte man mit einem ganzen Spiegel für zwei Telescope ausreichen. Dick hat auch durch ein solches Fernrohr mit einem Glasspiegel bei einer 12 — 20 maligen Vergrösserung entfernte Gegenstände ziemlich deutlich und wohl begrenzt gesehen.

2.

Neues Photometer nach Bouguers Grundsätzen von Ritschie.

(Edinb. journ. of science. Nr. IX. p. 129.)

Dieses Instrument besteht aus einer rechteckigen Büchse ABCD (Fig. 20) von 1 — 1½ Zoll, die auf bei-

den Seiten offen und inwendig zur weiteren Abhaltung alles falschen Lichtes geschwärzt ist. In dieser Büchse befinden sich zwei rechtwinkelige Stücke von Planspiegeln CF und FD, die gegen einander unter einem rechten Winkel, mithin gegen die Seiten der Büchse unter 45° geneigt sind. An der oberen Seite der Büchse befindet sich eine rechtwinkelige Oeffnung EG, die etwa einen Zoll lang und $\frac{1}{8}$ Z. breit, und mit geöhltem Papier bedeckt ist. Die beiden Spiegel sollen aus einem einzigen grösseren Stücke geschnitten seyn, um ein vollkommen gleiches Reflexionsvermögen zu besitzen, und die rechtwinkelige Oeffnung soll eine kleine Scheidewand F von geschwärztem Papier haben, damit sich das Licht von den beiden Spiegeln nicht mit einander vermengen kann, und nicht etwa dadurch das Resultat unrichtig werde.

Beim Gebrauche stellt man das Instrument mitten zwischen zwei Kerzenlichter, die 6 oder 8 F. von einander entfernt sind, so, dass die beiden Spiegel gegen sie gekehrt sind. Hierauf entfernt oder nähert man jede dieser Kerzen dem Instrumente so lange, bis das Papier an der rechtwinkeligen Oeffnung zu beiden Seiten der Scheidewand gleich stark beleuchtet ist. Dann verhalten sich die Lichtstärken der Flammen, wie verkehrt die Quadrate ihrer Entfernungen vom Instrumente. Es ist sehr gut, wenn man das Instrument auf die Mitte eines Bretes stellt, das der Länge nach in gleiche Theile getheilt ist, um die Entfernung der Kerzen vom Photometer gleich angeben zu können.

Das beleuchtete Papier sieht man am besten durch

eine etwa 8 Z. lange Röhre an, die inwendig geschwärzt ist, damit nur das Licht ins Auge gelange, welches durch das Papier geht. Statt der beiden Spiegel kann man auch weisses Papier oder ein glattes Stück Holz nehmen, das wie die Spiegel einen rechten Winkel macht. In diesem Falle braucht man die Oeffnung an der Seite nicht mit geöhltem Papier zu überziehen. Dieses Instrument ist einfacher als das vorige, und gewährt in manchem Falle entschiedene Vortheile. Wie auch immer das Instrument eingerichtet wird, so muss man doch, um genaue Resultate zu erlangen, die Vorsichtsmassregel anwenden, dass man das Instrument um seine Axe dreht, und bald diesen bald jenen Spiegel gegen einen bestimmten Spiegel zu wendet, und aus mehreren Beobachtungen das Mittel nimmt.

Wenn zwei Flammen eine verschiedene Farbe haben, hält es schwer, die Entfernung zu finden, bei der sie das Photometer gleich beleuchten. Mehrere Beobachtungen geben aber auch in diesem Falle einen Mittelwerth, der sich der Wahrheit sehr stark nähert.

3.

Das Thaumatrop von Dr. Paris.

(Edinb. journ. of science. Nr. VII. p. 87.)

Es ist bekannt, dass eine Lichtempfindung im Auge längere Zeit anhält, als der leuchtende Körper auf dasselbe einwirkt. Aus diesem Grunde erscheint uns eine glühende im Kreise geschwungene Kohle wie ein leuchtender Ring, und aus derselben Ursache bildet eine Sternschnuppe beim Herabfallen einen lan-

gen leuchtenden Streifen. Das Instrument, wovon hier die Rede ist, beruht auch auf diesem Grundsatze, und besteht aus einer kreisförmigen Scheibe von Papier, die sich um einen ihrer Durchmesser wie um ihre Axe schnell drehen lässt. Auf jede der zwei Seiten dieser Scheibe mahlt man einen Gegenstand, so, dass beide zusammen einen dritten geben, welches z. B. der Fall ist, wenn sich auf einer Seite ein Käfig, auf der anderen ein Vogel befindet; dreht man nun die Scheibe sehr schnell, so sieht man diesen dritten Gegenstand, im gegebenen Falle, den Vogel im Käfig, weil im Auge die Empfindung, die ein Gegenstand erregt, noch fortdauert, wenn die Empfindung vom andern beginnt. Es ist klar, dass man dadurch recht artige Erscheinungen hervorbringen kann.

VII. Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

Hygrometrie.

Verdünstung.

Man muss wohl schon vor undenklichen Zeiten die Bemerkung gemacht haben, dass Wasser und andere tropfbare Flüssigkeiten, die der freien Luft ausgesetzt sind, bei jeder Temperatur nach und nach an Masse abnehmen, und endlich ganz verschwinden; allein man wusste lange nicht, was aus ihnen dabei geworden ist. Man sah wohl, dass kochendes Wasser

in einen expansiblen Körper übergehe, aus dem es sich durch Erkältung oder durch Zusammendrücken wieder herstellen lässt, allein man glaubte nicht annehmen zu dürfen, dass dasselbe auch in einem gewissen Grade bei jeder anderen geringeren Temperatur Statt finde, weil man die Eigenschaften der Dünste, wodurch sie sich von den sogenannten beständig ausdehnsamen Körpern unterscheiden, nicht kannte. Endlich trat im Jahre 1810 Dalton in Manchester mit seinen Versuchen über die Dunstbildung und über die Eigenschaften der Dünste ans Licht, aus denen man deutlich ersehen konnte, dass das oben genannte Verschwinden der Flüssigkeiten in der Luft davon herkomme, weil sie nach und nach in ausdehnsame Körper übergehen, die sich dem Tastsinne und dem Gesichte entziehen. Jede Flüssigkeit, so lehrte er, verdünstet sowohl im luftleeren als in einem mit irgend einer Luftart erfüllten Raume bei jeder Temperatur so lange, bis die bereits schon gebildeten Dünste einen Grad von Spannkraft und Dichte haben, die bei der bestehenden Temperatur nicht mehr vergrössert werden kann, und desshalb gewöhnlich das Maximum der Spannkraft genannt wird. Werden die schon gebildeten Dünste durch einen Luftzug oder auf irgend eine andere Weise weggeführt, oder ihnen nur die Möglichkeit gestattet, sich auszubreiten, so dauert die Verdünstung ohne Unterlass fort, bis die ganze Flüssigkeit den ausdehnsamen Zustand angenommen hat.

In ganz dunstfreier, trockener Luft geht die Verdünstung am schnellsten vor sich, wird aber immer schwächer, so wie sich die Dünste über der Ober-

fläche der tropfbaren, verdünstenden Masse anhäufen, und hört endlich ganz auf, sobald die Dünste ihr Maximum der Spannkraft und Dichte erlangt haben. In diesem Falle sagt man, der Raum sey mit Dünsten gesättiget. Es ist also nicht die Wärme, sondern der Mangel an gehöriger Dunstmenge die Veranlassung zur Verdünstung. Da ein ausdehnsamer Körper aus einem tropfbar flüssigen nur durch Aufnahme einer gewissen Wärmemenge gebildet werden kann, so wird desto mehr Wärme gebunden werden müssen, je schneller die Verdünstung vor sich geht. Ist keine besondere Wärmequelle vorhanden, so muss die verdünstende Flüssigkeit selbst diese Wärme hergeben, und dadurch abgekühlt werden. Daher ist der Unterschied, welcher Statt findet zwischen der Temperatur der Oberfläche einer verdünstenden Flüssigkeit und der des Mittels, worin die Verdünstung vor sich geht, der Menge der in einer gewissen Zeit gebildeten Dünste proportionirt. Auf diesem Grundsatze beruht die mathematische Theorie der Verdünstung, welche Tredgold *) gibt.

Ungeachtet man nach diesen Principien den Einfluss vieler Umstände auf die Grösse der Verdünstung irgend einer Flüssigkeit genau nachweisen kann, so bleibt doch noch manches übrig, dessen Zusammenhang mit dem bekannten Hergange der Sache noch im Dunkeln ist. Von der Art ist der Einfluss fester, in einer Flüssigkeit befindlicher Körper auf die Beschleunigung des Siedens, wie ihn Oersted nachgewiesen hat.

---

*) Philos. Mag. January. 1826. p. 45. e. s.

Expansivkraft der Dünste.

Mit der Bestimmung der Spannkraft, welche den Dünsten, besonders denen aus Wasser, im Maximo bei jeder gegebenen Temperatur zukommt, haben sich viele verdiente Gelehrte befasst, vorzüglich Betancourt, Schmidt, Dalton, Gay-Lussac, Arxberger, Ure etc. Allein die Resultate aller dieser Versuche stimmen nicht so gut mit einander überein, als es zu wünschen wäre. Uebrigens traut man den von Dalton und Gay-Lussac gefundenen die meiste Annäherung an die Wahrheit zu. Die meisten dieser Versuche erstreckten sich aber nicht weit über die Siedhitze des Wassers, besonders ist dieses mit den Dalton'schen der Fall; desshalb hat man das Gesetz gesucht, nach welchem man aus der für gewisse Wärmegrade bekannten Spannkraft der Dünste dieselbe für jede beliebige höhere oder niedere Temperatur finden könnte; es haben auch mehrere Gelehrte, wie z. B. Mayer, Soldner, Laplace, Poisson, Prony etc. Formeln angegeben, die dieses Gesetz darstellen sollten, allein die Richtigkeit derselben kann man doch nur wieder aus einer Vergleichung zwischen dem Ergebniss eines Versuches und dem für dieselben Umstände aus der Formel abgeleiteten nummerischen Werthe beurtheilen; Versuche bei hohen Temperaturen sind aber schwierig anzustellen und lassen immer im Resultate eine grosse Unsicherheit zurück, welche obige Vergleichung erschwert.

Clemens Desormes *) gibt die Expansivkraft der Wasserdünste auf folgende Weise an:

*) Nouveau Bulletin des sciences. April 1826.

Spannkraft.	Temperatur.
1	106° C.
2	121
3	135
4	145
5	153
6	160
7	166
8	172
9	177
10	182

Als Einheit der Spannkraft ist diejenige angenommen, welche einer Quecksilbersäule von 28 P. Zoll Höhe entspricht.

Da die Dünste des kochenden Wassers eine Spannkraft haben, welche dem Druck der Atmosphäre das Gleichgewicht hält, und dieser Druck abnimmt, so wie man sich von der Erde entfernt, so muss auch die Spannkraft dieser Dünste in der Höhe geringer seyn als unten, und das Wasser muss oben unter 100° C zu kochen anfangen.

Wollaston hat dieses Gesetz benützt, um aus der in irgend einem Orte gegebenen Siedhitze des reinen Wassers den darauf lastenden Luftdruck und dadurch die Höhe des Ortes über der Meeresfläche zu berechnen. Allein abgesehen davon, dass man hierzu Thermometer braucht, die wenigstens Tausendelgrade angeben, wenn man auch nur mässige Höhenunterschiede durch dieses Mittel erkennen will, und dass die Siedhitze einer Flüssigkeit beständig kleinen Oscillationen unterliegt, die durch das Zerplatzen der Dampfblasen erzeugt werden, so hat auch

Murray *) durch Versuche auf hohen Bergen gezeigt, dass auf die Siedhitze des Wassers mehrere schwer zu bestimmende Umstände einwirken, die alle gegeben seyn müssten, wenn man aus ihr die Höhe eines Ortes bestimmen wollte. Bei fünf Versuchen, die er zu Simpeln am Simplon anstellte, zeigten sich folgende Temperaturen des siedenden Wassers.

Die Thermometerkugel	1. Vers.	2. Vers.	3. Vers.	4. Vers.	5. Vers.
berührt die Oberfläche des Wassers	131° F	131° F	124° F	116°,5 F	109°,5 F
ist ganz eingetaucht	135 „	134 ,5 „	131 „	120 ,5 „	114 ,5 „
berührt den Boden des Gefässes	231 „	126 „	126 „	116 ,5 „	109 ,5 „

Uebrigens meint Murray, dass diese Temperatur bestimmt werde

1) durch den hygrometrischen Zustand der Luft;

2) durch die Aenderung, welche die Thermometerkugel wegen des verminderten Luftdruckes erleidet;

3) durch die wegen vermindertem Luftdruck erfolgende Vergrösserung des Volumens des Wassers;

4) durch die Tiefe, bis zu welcher die Thermometerkugel eingetaucht ist;

5) durch die Gestalt und das Material und die Tiefe des Gefässes.

6) Falls man den Versuch unter Dach vorstellt, durch den Unterschied zwischen der inneren und äusseren Temperatur;

7) durch den Wind, der die Dichte der Luft ändert;

*) Philos. Mag. March. 1826. p. 201.

8) durch das langsamere oder heftigere Entweichen des Dampfes;

9) durch die Tageszeit.

Die Spannkraft der Wasserdünste musste zwar die Physiker am meisten beschäftigen, weil sie in der Atmosphäre eine grosse Rolle spielen und bei Dampfmaschinen die bewegende Kraft abgeben, allein in theoretischer Hinsicht ist auch die Spannkraft der Dünste anderer Flüssigkeiten von Interesse. Dalton glaubte aus einigen Versuchen schliessen zu können, dass sich aus dem für eine gewisse Temperatur gegebenen Maximum der Spannkraft der Wasserdünste das jeder anderen Flüssigkeit abnehmen lasse, wenn man nur den Grad ihrer Siedhitze kennt. Er meinte nämlich, weil alle Flüssigkeiten in der Siedhitze Dünste von derselben Spannkraft geben, so müssen sie auch unter und über dieser Temperatur gleich expansible Dünste liefern, sobald ihr Temperaturunterschied demjenigen gleich ist, welcher bei ihrer Siedhitze Statt hat. Nach diesem müssten Dünste aus Alkohol, der bei 63° R siedet, bei 20° R ein Maximum der Spannkraft von 33,038 Millimeter geben, weil die des Wassers, das bei 80° siedet, bei 37° d. i, bei einer um 80 — 63 = 17° höheren Temperatur eben so gross ist. Allein aus den von Betancourt angestellten Versuchen haben Alkoholdünste bei 20° R. eine Expansivkraft von 40,875 M. Eben so wenig stimmen die Ergebnisse anderer Versuche, wie sie Watt, Robinson, Schmidt, Munke u. a. angestellt haben, mit dieser Regel überein. Indess ist doch so viel gewiss, dass die Dünste verschiedener Flüssigkeiten bei der-

selben Temperatur eine desto grössere Spannkraft haben, je höher ihr Siedpunct liegt.

Wenn Dünste von verschiedenen Flüssigkeiten, oder Dünste irgend einer Flüssigkeit und Luft mit einander gemengt werden, so behält jeder dieser ausdehnsamen Körper seine ihm eigenthümliche Spannkraft bei, so dass die des Gemenges der Summe der Spannkräfte der Bestandtheile gleich wäre, wenn sie nach der Vermengung noch unter demselben Druck stünden, wie vor derselben; ist dieser geringer, so wird auch die Spannkraft in demselben Verhältnisse kleiner. Nach diesem Grundsatze lehrt Dalton die Raumerweiterung finden, die eine Luftmasse durch Zusatz einer bestimmten Dunstmenge von gegebener Expansivkraft erleidet.

Hygrometrische Mittel.

So lange man die Eigenschaften der Dünste nicht recht kannte, glaubte man nur auf die Dunstmenge n der Luft aus den Veränderungen schliessen zu können, die jene Körper in feuchter Luft erleiden, welche das Wasser aus ihr anziehen. Diesem Umstande verdanken unzählige Hygrometer ihren Ursprung, unter denen aber nur das Saussure'sche und das Deluc'sche einen eigenen wissenschaftlichen Werth haben, wiewohl selbst dieser dadurch sehr gemindert wird, dass in beiderlei Instrumenten organische Stoffe als die Feuchtigkeitszieher angewendet werden, die doch diese Eigenschaft mit der Zeit völlig verlieren, so, dass sie sich in ganz feuchter und in ganz trockener Luft auf gleiche Weise verhalten. Nur wenige Fälle kennt man, wo ein

Menschenhaar, wie es zu dem Saussure'schen Hygrometer gebraucht wird, lange der Einwirkung der Zeit widerstanden hat, und unter diesen ist gewiss der von Pictet *) angeführte der merkwürdigste. Er nahm ein Haar von einer Mumie, die man in Genf aufbewahrt, spannte es mit einem andern frisch zubereiteten in ein Hygrometergestell ein, liess das so entstandene Doppelhygrometer mehrere Male die ganze Scale durchgehen, und bemerkte keinen anderen Unterschied, als dass sich das Haar von der Mumie etwas später ins Gleichgewicht setzte als das andere, wahrscheinlich weil Pictet, aus Furcht ihm die nöthige Haltbarkeit zu benehmen, unterliess, es in einer Lauge zu kochen. Indess darf man diesen Fall nicht als eine Empfehlung der Haarhygrometer überhaupt ansehen, weil ein Haar, das durch Lauge alles Oehls beraubt ist, wie es geschehen muss, wenn man es als hygrometrische Substanz brauchen will, von der Luft und dem Wasser grössere Einwirkungen erleidet, und sich überdiess noch in einem gespannten Zustande befindet.

Heut zu Tage scheinen jene hygrometrischen Vorrichtungen den Vorrang gewinnen zu wollen, welche auf der Eigenschaft der Dünste beruhen, durch einen gewissen Grad der Erkältung in tropfbaren Zustand überzugehen. Von der Art ist das schon allerwärts bekannte Hygrometer von Daniell, das durch Döbereiner und vorzüglich durch Körner eine neue Verbesserung erhielt, und im eigentlichen Sinne den Namen eines Hygrometers ver-

---

*) Biblioth. univers. Dec. 1824.

dient. Diese Instrumente führen unmittelbar zur Kenntniss der Spannkraft der Dünste in der Luft bei derjenigen Temperatur, wo das Beschlagen eintritt, aus der man leicht die Spannkraft derselben bei der bestehenden Temperatur und auch ihre Menge in einem gegebenen Volumen abnehmen kann.

Dessenungeachtet hat man in der neuesten Zeit noch auf andere hygrometrische Mittel geachtet; Leslie hat das von ihm erfundene Differenzialthermometer zu diesem Zwecke benützt, indem er eine Kugel desselben mit Floretseide umwickelte, sie mit Wasser befeuchtete, und nun aus der Temperaturdifferenz, welche die Verdünstung des Wassers hervorbrachte, auf die in der Luft vorhandene Dunstmenge geschlossen. Anderson *) lehrt nach demselben Grundsatze die Spannkraft der in der Luft vorhandenen Dünste dadurch zu finden, dass man beobachtet, um wie viel ein Thermometer in der Luft, dessen Kugel mit Wasser befeuchtet ist, tiefer steht, nachdem es die stationäre Temperatur erlangt hat, als ein anderes ebenfalls der Luft ausgesetztes aber ganz trockenes.

August **) zeigte nach Gay-Lussac's Untersuchungen über die Verdünstungskälte in trockener Luft, und nach Ivory's Rechnungen, dass die Differenz des feuchten und trockenen Thermometers mit ziemlicher Genauigkeit jedesmal halb so gross ist, wie die Differenz des inneren und äusseren Thermometers im Daniell'schen Hygrometer im Augen-

*) Siehe I. Heft dieser Zeitschrift S. 44 u. f.

**) Poggendorfs Annalen. 1825. S. 9 u. 11.

blicke des Beschlagens. Man kann daher durch ein Instrument, welches aus zwei übereinstimmenden Thermometern besteht, die so hängen, dass sie der Luft freien Zutritt gestatten, und wovon die Kugel des einen mit Musselin umwickelt ist, der in ein Gläschen mit Wasser geleitet wird, leicht die jedesmalige Spannkraft der Dünste erfahren. August nennt dieses Instrument Psychrometer.

La Rive *) hat die Eigenschaft der Schwefelsäure, das Wasser aus der Luft anzuziehen, und sich in Berührung mit demselben zu erhitzen, als ein sehr einfaches Mittel vorgeschlagen, die Spannkraft der Dünste in der Luft zu erfahren. Er taucht die Kugel eines empfindlichen Thermometers in Schwefelsäure, zieht sie heraus, und erschüttert sie ein wenig, damit nur eine dünne Schichte von dieser Säure an ihr hängen bleibe. Das Thermometer steigt alsogleich über den Grad, den es vor dem Eintauchen angab, und erreicht eine gewisse Höhe, von der es wieder zu sinken beginnt. Die Anzahl der Grade, um die es steigt, verhält sich nun nach La Rive's Versuchen zu derjenigen, um die es bei derselben Lufttemperatur in ganz mit Dünsten gesättigter Luft steigt, wie die Spannkraft der Dünste im gegenwärtigen Fall zum Maximum der Spannkraft bei der gegebenen Temperatur. Zeigt z. B. das Thermometer in der Luft 12°, steigt aber, nachdem es mit einer Schichte von Schwefelsäure bedeckt ist, auf $25\frac{1}{2}^\circ$, mithin um $15\frac{1}{2}^\circ$, während es in einer ganz mit Wasserdunst gesättigten Glocke auf 27°, mithin um 15° steigt, so ist $13\frac{1}{2} : 15$ das Verhältniss der

*) Biblioth. univers. 1825. April.

Spannkraft der wirklichen Dünste zu der bei 12° möglichen. Bemerkt man auf der Scale eines Thermometers bei jedem Grade die Anzahl derselben, um welche es von diesem aus steigen würde, wenn es mit Schwefelsäure befeuchtet, in eine mit Dünsten gesättigte Luft getaucht würde; so dürfte man bei jedem Versuche nur die Anzahl der Grade, um die es vermöge der Schwefelsäure stieg, durch diejenige theilen, welche dem Grade beigesetzt ist, der die jedesmalige Lufttemperatur angibt, um die Spannkraft des Wasserdunstes in der Luft im Augenblicke des Versuches zu finden, vorausgesetzt, dass das Maximum der Spannung für diese Temperatur als Einheit angenommen wird. Gay-Lussac *) machte aber gegen die La Rive'sche Theorie dieses Verfahrens den sehr gegründeten Einwurf, dass der Erfinder auf die Luft Rücksicht zu nehmen vergessen habe, die mit dem sich an die Thermometerkugel absetzenden Dunst vermengt ist, und sich auch erwärmt. Denn offenbar muss das Maximum der Erwärmung desto geringer ausfallen, je dichter die an der Erwärmung Theil nehmende Luft ist, und doch ist die Dunstmenge, die eine Portion Luft aufnehmen kann, von ihrer Dichte unabhängig.

Es ist also dieses Verfahren wohl sehr sinnreich, allein es auf eine vollständige Theorie zurückzuführen, würde mehr Arbeit machen, als ihrem Nutzen angemessen wäre.

---

*) Annales de Chimie etc. Tom. 30.

MATHEMATISCHE ABTHEILUNG.

I. Gesetze des Gleichgewichts, auf eine neue Art entwickelt, vom Professor Nörrenberg, Lehrer der Mathematik und Physik an der Grossherzoglichen Militärschule in Darmstadt.

Einleitung.

1. Jede Ursache, welche, auf einen materiellen Punct wirkend, denselben nach einer bestimmten Richtung zu bewegen strebt, nennt man Kraft. Die Richtung, nach welcher die Kraft den Punct zu bewegen strebt, ist die Richtung der Kraft. Der Punct, auf welchen die Kraft wirkt, als Punct einer Linie oder Fläche oder eines Körpers betrachtet, ist der Angriffspunct der Kraft.

2. Materielle Puncte oder Körper, die so mit einander verbunden sind, dass man die Lage des einen nicht auf jede Art verändern kann, ohne dadurch irgend eine Veränderung in der Lage der übrigen hervorzubringen, bilden ein System. Ein System ist unveränderlich, wenn die Entfernungen aller Puncte von einander unveränderlich sind.

3. Ein Punct oder ein System ist beweglich, wenn seine Lage auf irgend eine Art durch die geringste Kraft verändert werden kann; unbeweg-

lich, wenn keine Kraft im Stande ist, seine Lage zu verändern. Die Beweglichkeit eines Systems ist vollkommen, wenn jeder Punct nach jeder Richtung beweglich ist; unvollkommen, wenn einzelne Puncte entweder unbeweglich oder nur auf gewissen Linien oder Flächen beweglich sind. Ein System, dessen Beweglichkeit vollkommen ist, nennt man ein freies System.

4. Wenn mehrere Kräfte zugleich auf ein bewegliches System wirken, ohne dass dadurch seine Lage auf irgend eine Art verändert wird, so ist das System im Gleichgewichte. Das Gleichgewicht eines Systems ist abhängig von der Beschaffenheit seiner Theile, von der Art ihrer Verbindung und Beweglichkeit, von der Grösse und Richtung der darauf wirkenden Kräfte und von der Lage der Angriffspuncte. Die Darstellung der Gesetze dieser Abhängigkeit ist der Gegenstand der Statik, oder, wenn flüssige Körper Theile des Systems bilden, der Hydrostatik.

Gleichgewicht eines freien unveränderlichen Systems.

5. Ein Punct ist mit einem unveränderlichen System fest verbunden, wenn seine Entfernung von allen Puncten des Systems unveränderlich ist. Die einfachste Art der Beweglichkeit eines nicht freien Systems findet Statt, wenn zwei mit demselben fest verbundene Puncte unbeweglich sind. Jede Veränderung seiner Lage ist alsdann nur eine Drehung desselben, um die durch die beiden Puncte bestimmte Achse. Die Bedingungen des Gleichgewichts für

dieses System führen aber, wenn sie allgemein genug ausgedrückt werden, unmittelbar zu den Bedingungen des Gleichgewichts für ein freies System, weil sich zeigen lässt, dass ein System, das um jede Achse im Gleichgewichte ist, auch im Gleichgewichte seyn muss, wenn es frei wird. Um dieses zu zeigen, seyen A und B zwei Puncte einer Achse, mit deren Hülfe das System im Gleichgewichte ist, so wird die Richtung BC des Drucks auf B nicht mit AB zusammenfallen, weil sonst, der Voraussetzung zuwider, ein einziger Punct A schon hinreichend wäre, das System im Gleichgewichte zu erhalten. Denkt man sich nun durch A eine Achse senkrecht zu der Ebene ABC, so wird der Druck auf B, da dessen Richtung senkrecht zu dieser Achse ist, ohne dieselbe zu schneiden, eine Drehung um diese Achse hervorbringen, sobald der Punct B frei wird. Da man also auf diese Weise für jedes System, das nur mit Hülfe irgend einer Achse im Gleichgewichte ist, eine andere Achse angeben kann, um welche kein Gleichgewicht Statt findet; so muss nothwendig ein System, das um jede Achse im Gleichgewichte ist, auch noch im Gleichgewichte seyn, wenn es frei wird.

6. Um aber die Bedingungen für das Gleichgewicht eines freien Systems aus den Bedingungen des Gleichgewichts eines mit einer Achse verbundenen Systems ableiten zu können, müssen diese durch eine Gleichung zwischen den Intensitäten der Kräfte, den Coordinaten und Winkeln, welche die Angriffspuncte und Richtungen der Kräfte, und die Lage der Achse bestimmen, ausgedrückt werden. Ist diese Gleichung gefunden, so werden diejenigen daraus abzuleitenden

Gleichungen, welche Statt finden müssen, wenn die erstere für jede Lage der Achse befriedigt seyn soll, die gesuchten Gleichungen des Gleichgewichts für ein freies System seyn.

7. Ein System, das sich nur um eine Achse drehen kann, ist im Gleichgewichte, wenn sich die Drehungsbestrebungen sämmtlicher Kräfte, in Beziehung auf diese Achse, gegen einander aufheben. Es muss daher zunächst untersucht werden, wie das Drehungsbestreben einer Kraft von ihrer Grösse, von der Entfernung ihres Angriffspunctes von der Achse, und von ihrer Richtung gegen die Richtung der Achse abhängt.

Der einfachste Fall findet Statt, wenn die Richtung der Kraft senkrecht zu der durch den Angriffspunct und die Achse bestimmten Ebene ist. Der Kürze wegen soll diese Ebene Angriffsebene heissen.

Es sey AB (Fig. 21) die Achse; C der Angriffspunct; CD = x die Entfernung desselben von der Achse und folglich senkrecht zu AB; CP die Richtung der Kraft P, senkrecht zu der Angriffsebene ABC. Wenn man nun DE = 1 annimmt und sich vorstellt, dass in E eine mit P parallele Kraft Q angebracht sey, welche ein eben so grosses Bestreben habe, die Unbiegsame CD um AB zu drehen als die Kraft P; so wird Q eine Function von x und P seyn, vermittelst deren man, sobald sie einmal bekannt ist, das Drehungsbestreben der Kraft P für jeden Werth von x und P auf eine Kraft reduciren kann, welche, in der Entfernung DE = 1 angebracht, dasselhe Drehungsbestreben hat. Um eine ganz klare Vorstellung von der Gleichheit der Drehungsbestrebungen

zweier Kräfte P und Q zu haben, kann man sich in E eine Kraft Q′ angebracht denken, welche der Kraft Q gleich und gerade entgegengesetzt ist; alsdann haben Q und Q′ offenbar ein gleich grosses Bestreben, CD um AB nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen, und es muss also, wenn P nicht vorhanden ist, Q′ mit Q im Gleichgewichte seyn. Wenn nun Q′ auch eben so gut der Kraft P das Gleichgewicht hält, wenn Q nicht vorhanden ist, so hat P einerlei Drehungsbestreben mit Q.

8. Um zu der Function $Q = F(x, P)$ zu gelangen, kann man zuerst untersuchen, wie Q von P abhängt, wenn sich x nicht ändert. Es seyen p und q zwei Kräfte, deren Angriffspuncte und Richtungen mit denen der Kräfte P und Q zusammenfallen, so dass genau dasselbe Statt findet, als wenn in den Puncten C und E die beiden Kräfte $P + p$ und $Q + q$ angebracht wären. Es ist klar, dass wenn p und q für sich allein eben so wohl gleiches Drehungsbestreben haben als P und Q, es auch die beiden Kräfte $P + p$ und $Q + q$ haben müssen, und man hat also die Gleichung

$$Q + q = F(x, P + p).$$

Entwickelt man die rechte Seite, so erhält man

$$Q + q = Q + \frac{dQ}{dP} \cdot p + \frac{d^2Q}{dP^2} \cdot \frac{p^2}{1 . 2} + \ldots;$$

folglich auch

$$q = \frac{dQ}{dP} \cdot p + \frac{d^2Q}{d^2P} \cdot \frac{p^2}{1 . 2} + \ldots$$

Da nun vermöge Voraussetzung q unabhängig von P ist, so muss es auch die rechte Seite dieser Gleichung seyn, was für einen Werth man auch der

Grösse p beilegen mag. Dieses erfordert aber, dass die Differentialcoefficienten

$$\frac{dQ}{dP}; \ \frac{d^2Q}{dP^2}; \text{ u. s. w.}$$

einzeln von P unabhängig, und also nur Functionen von x sind. Setzt man daher

$$\frac{dQ}{dP} = fx,$$

und integrirt in Beziehung auf P, so erhält man

$$Q = P fx + \varphi x.$$

Da aber für P = o auch Q = o seyn muss, so ist $\varphi x = o$, und man hat bloss

$$Q = P fx,$$

woraus man sieht, dass Q für einerlei x der Kraft P proportional ist.

9. Um fx zu finden, denke man sich in gleichen Abständen CF = CF′ = u, (Fig. 22,) zwei gleiche, mit P parallele Kräfte p, p′ angebracht, und es seyen q, q′ die Kräfte, welche, in der Entfernung DE = 1 angebracht, einerlei Drehungsbestreben mit p, p′ haben; so hat man vermöge des eben gefundenen, und weil p′ = p seyn soll

$$p = pf(x + u); \ q' = pf(x - u).$$

Nimmt man nun die Drehungsbestrebungen von p und p′ zusammengenommen, dem von P gleich an, so hat man Q = q + q′, und folglich

$$P fx = pf(x + u) + pf(x - u);$$

oder, wenn man die rechte Seite dieser Gleichung entwickelt,

$$P fx = 2p \left\{ fx + \frac{d^2fx}{dx^2} \cdot \frac{u^2}{1 . 2} + . . \right\}.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung unabhängig von

u ist, so muss es auch die rechte seyn, und man hat daher, weil sich zeigen lässt, dass auch p unabhängig von u ist,

$$\frac{d^2 fx}{dx^2} = 0.$$

Integrirt man diese Gleichung, so erhält man

$$fx = Ax + B,$$

und folglich

$$Q = P\,(Ax + B).$$

Da für $x = 0$ auch $Q = 0$ seyn muss, so ist $B = 0$, und die Gleichung reducirt sich auf

$$Q = PAx.$$

Da ferner für $x = 1$, $Q = P$ seyn muss, so ist $A = 1$, und also

$$Q = Px.$$

10. Was die vorausgesetzte Unabhängigkeit zwischen p und u betrifft, so ist klar, dass p und p′ zusammengenommen einerlei Drehungsbestreben mit P haben, wenn sie mit einer Kraft P′, die der Kraft P gleich und gerade entgegengesetzt ist, im Gleichgewichte sind, und dass also nur gezeigt zu werden braucht, dass in diesem Falle p von u unabhängig ist.

11. Es sey (Fig. 23) $CF = CF' = u$; CP′ senkrecht zu FF′ und parallel mit Fp und F′p′; $p = p'$. Da nun auf der einen Seite der Richtung von P′ alles genau so ist wie auf der andern, so ist klar, dass die drei Kräfte p, p′, P′ in diesem Systeme keine andere Bewegung hervorzubringen streben können, als eine fortschreitende nach der Richtung CP′ oder P′C, und dass der Werth von P′, welcher diese Bewegung verhindert, nur eine Function von u und p

seyn kann. Es lässt sich aber auf dieselbe Art, wie in Nr. 8 zeigen, dass P′ für einerlei u der Kraft p proportional ist, und dass man also

$$P' = p\varphi u$$

setzen kann.

12. Um φu zu finden, denkt man sich, (Fig. 24) jede der beiden gleichen Kräfte p, p auf dieselbe Art mit zwei andern gleichen Kräften r, r im Gleichgewichte, wie P′ mit p, p im Gleichgewichte seyn soll, nur mit dem Unterschiede, dass der Abstand zwischen den Richtungen von p und r nicht u, sondern v ist; so hat man nach Nr. 11,

$$p = r\varphi v,$$

und die vier Kräfte r, r, r, r, verhindern die Bewegung des Systemes eben so gut als P′. Da nun zwei von den vier Kräften r, r, r, r den gleichen Abstand $u + v$, und die beiden andern den gleichen Abstand $u - v$ von der Richtung CP′ haben, so werden auch die beiden ersten mit einer Kraft

$$R = r\varphi(u + v)$$

und die beiden andern mit einer Kraft

$$R' = r\varphi(u - v),$$

und folglich alle vier zusammen mit einer Kraft $R + R'$ nach der Richtung CP im Gleichgewichte seyn. Diese Kraft $R + R'$ verhindert also die Bewegung des Systems wieder eben so gut, als die beiden Kräfte p, p. Da nun die beiden Kräfte p, p mit P′ im Gleichgewichte seyn sollen, so muss es auch $R + R'$ seyn, und man hat also, weil die Richtungen von P′ und $R + R'$ einander gerade entgegengesetzt sind,

$$P' = R + R'.$$

Diese Gleichung verwandelt sich aber vermöge der vier vorhergehenden in folgende:

$$\varphi v \,.\, \varphi u = \varphi(u+v) + \varphi(u-v),$$

welche entwickelt und mit φu dividirt,

$$\varphi v = 2\left\{1 + \frac{1}{\varphi u}\cdot\frac{d^2\varphi u}{du^2}\cdot\frac{v^2}{1.2} + \frac{1}{\varphi u}\cdot\frac{d^4\varphi u}{du^4}\cdot\frac{v^4}{1.2\,3.4} + \ldots\right\}$$

gibt. Da die linke Seite dieser Gleichung unabhängig von u ist, so muss es auch die rechte seyn, welches erfordert, dass die Coefficienten

$$\frac{1}{\varphi u}\cdot\frac{d^2\varphi u}{du^2};\ \frac{1}{\varphi u}\cdot\frac{d^4\varphi u}{du^4};\ \text{u. s. w.}$$

constante Grössen sind. Setzt man daher

$$\frac{1}{\varphi u}\cdot\frac{d^2\varphi u}{du^2} = a,$$

woraus

$$\frac{d^2\varphi u}{du^2} = a\varphi u$$

folgt, so erhält man durch wiederhohltes Differenziren und substituiren

$$\frac{d^4\varphi u}{du^4} = a\frac{d^2\varphi u}{du^2} = a^2\,\varphi u;$$

$$\frac{d^6\varphi u}{du^6} = a^2\frac{d^2\varphi u}{du^2} = a^3\,\varphi u;\ \text{u. s. w.}$$

folglich

$$\varphi v = 2\left\{1 + \frac{av^2}{1.2} + \frac{a^2v^4}{1.2.3.4} + \frac{a^3v^9}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right\}$$

Vergleicht man die eingeschlossene Reihe mit der bekannten

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

für $\cos x$, so sieht man leicht, dass sie diese Form annimmt, wenn man $-b^2$ statt a setzt. Man erhält hierdurch

$$\varphi v = 2\left\{1 - \frac{(bv)^2}{1.2} + \frac{(bv)^4}{1.2.3.4} - \frac{(bv)^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right\}$$

$$= 2\cos(bv),$$

und es ist also auch

$$\varphi u = 2\cos(bu);$$

$$P' = 2p\cos(bu).$$

13. Um die Constante b zu bestimmen, setze man

$$u = \frac{\frac{1}{2}\pi}{b},$$

so erhält man das offenbar unrichtige Resultat

$$P' = 2p\cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

welches nicht anders vermieden werden kann, als wenn man $b = 0$ setzt. Hierdurch reducirt sich die Gleichung

$$P' = 2p\cos(bu)$$

auf

$$P' = 2p,$$

woraus man sieht, dass p unabhängig von u ist, und zugleich, in welcher Beziehung P′ mit den gleichen, parallelen Kräften p, p steht, wenn Gleichgewicht Statt findet.

14. Da die Gleichung $Q = Px$, (Nr. 9,) nur in der Voraussetzung gefunden worden ist, dass sich die Angriffspuncte von P und Q in einer Senkrechten zur Axe befinden, so ist noch zu zeigen, dass sie für jede Lage dieser Angriffspuncte gilt. Hierzu muss aber vorher gezeigt werden, dass das Drehungsbestreben zweier gleichen Kräfte, deren Angriffspuncte gleich weit von der Achse abstehen, gleich ist, erstens, wenn diese Angriffspuncte mit der Achse

in einer Ebene liegen, und zweitens, wenn sie in einer Ebene liegen, die zu der Achse senkrecht ist.

15. Für den ersten Fall sey AB (Fig. 25) die Axe; CD senkrecht zu AB; C′C″ in der Ebene ABC und ebenfalls senkrecht zu AB; CD = C′D′ = C″D′. Es seyen C, C′, C″ die Angriffspuncte der gleichen Kräfte P, P′, P″; CP, C′P′, C″P″ die Richtungen derselben, senkrecht zu der Ebene ABC; D′ und F die Angriffspuncte der gleichen Kräfte R = 2P und R′ = 2P; D′R, FR′ ihre Richtungen, ebenfalls senkrecht zu der Ebene ABC.

Da nun C′C″ und CC″ in D′ und F von AB halbirt werden, so würde nach Nr 13, wofern P nicht da wäre, R mit P′ und P″, und wenn P′ nicht da wäre, R′ mit P″ und P im Gleichgewichte seyn. Da aber die Angriffspuncte von R und R′ in AB liegen, so würden diese Kräfte eine Drehung um AB nicht verhindern können, wenn nicht das Drehungsbestreben von P″, im ersten Falle dem von P′, und im zweiten dem von P gleich und entgegengesetzt wäre. Da nun in beiden Fällen das Drehungsbestreben von P″ dasselbe ist, so müssen die von P′ und P gleich seyn.

16. Für den zweiten Fall sey CDC′ (Fig 26) die Ebene, welche die Achse in D senkrecht schneidet, und in welcher sich die gleich weit von D abstehenden Angriffspuncte C, C′ der gleichen Kräfte P, P′, P″ befinden. In dieser Ebene liegen auch die zu CD und C′D senkrechten Richtungen CP, C′P′, C′P″ dieser Kräfte.

Denkt man sich jetzt durch die Achse eine Ebene gelegt, welche den Winkel CDC′ halbirt, so ist in

Beziehung auf die Achse und die Kräfte P, P'', auf der einen Seite dieser Ebene alles genau so wie auf der andern, und es ist folglich kein Grund vorhanden, warum das Drehungsbestreben von P'' dem von P nicht gleich, und was sich von selbst versteht, entgegengesetzt seyn sollte. Da nun auch wegen der gerade entgegengesetzten Richtung und gleichen Grösse der Kräfte P'', P' das Drehungsbestreben von P'' dem von P' gleich und entgegengesezt ist, so muss das von P' mit dem von P einerlei seyn.

17. Wenn nun, Fig. 27, der Angriffspunct C einer Kraft P eine beliebige Lage gegen den Angriffspunct E der Kraft Q und die Achse AB hat, so kann man sich ausser der Ebene ABE noch eine andere CD'C' denken, welche durch C geht, und zu AB senkrecht ist. Alsdann hat, nach Nr. 16, wenn D'C' die Durchschnittslinie beider Ebenen, und $C'D = CD'$ ist, eine in C' angebrachte Kraft $P' = P$ noch einerlei Drehungsbestreben mit P. Ferner hat, nach Nr. 15, wenn C''D senkrecht zu AB, und $C''D = C'D'$ ist, eine in C'' angebrachte Kraft $P'' = P'$ einerlei Drehungsbestreben mit P' und folglich auch mit P. Da nun die Angriffspuncte von Q und P'' in einer zu AB senkrechten Geraden liegen, so hat man nach Nr. 9, wenn Q die Kraft bezeichnet, welche, in der Entfernung $DE = 1$ angebracht, mit P'' und folglich auch mit P einerlei Drehungsbestreben um AB hat,

$$Q = P''.C''D = P.CD'.$$

Die Nr. 9 gefundene Gleichung

$$Q = Px$$

gilt demnach für alle Fälle, in welchen die Richtungen der Kräfte senkrecht zu ihren Angriffsebenen sind.

18. Für den Fall, dass die Richtung der Kraft P nicht senkrecht zu ihrer Angriffsebene ist, sey C, (Fig. 28) ihr Angriffspunct; CR′ die Projection ihrer Richtung CP auf der Angriffsebene; PCR′ = ⊖ der Winkel, welchen ihre Richtung mit der Angriffsebene macht, und CR senkrecht zu dieser Ebene. Es ist klar, dass zwei Kräfte R und R′, welche in C nach den Richtungen CR und CR′ angebracht sind, und durch ihr Zusammenwirken den Punct C eben so stark nach der Richtung CP zu bewegen streben, als die Kraft P, die Kraft P ersetzen können. Da aber die Richtung von R′ in der Angriffsebene liegt, so ist das Drehungsbestreben dieser Kraft null, und die Kraft R ist es also, welche hinsichtlich des Drehungsbestrebens die Kraft P ersetzt.

Die Aufgabe, R und R′ so zu bestimmen, dass sie die Kraft P ersetzen, reducirt sich darauf, sie so zu bestimmen, dass sie mit einer Kraft P′, die der P gleich, und gerade entgegengesetzt ist, im Gleichgewichte sind. Um hierzu zu gelangen, kann man auf diesen besondern Fall das Verfahren anwenden, welches in Nr. 5 und 6 für den allgemeinen Fall angedeutet worden ist.

19. Da die Kräfte P′, R, R′, weil ihre Richtungen in der Ebene RCR′ liegen, den Punct C nur in dieser Ebene zu bewegen streben, so folgt aus ähnlichen Betrachtungen wie in Nr. 5, dass die Kräfte P′, R, R′ im Gleichgewichte sind, wenn der Punct C um jede zu der Ebene RCR′ senkrechte Achse im Gleichgewichte ist. Es sey M, (Fig. 28) der Durchschnittspunct einer solchen Achse mit der Ebene RCR′. Um nun mit Hülfe der in Nr. 9 gefundenen

Gleichung $Q = Px$ die Drehungsbestrebungen der Kräfte P', R, R' in Beziehung auf diese Achse ausdrücken zu können, müssten ihre Richtungen senkrecht zu ihren Angriffsebenen seyn, welches aber nicht der Fall ist. Allein dieses Hinderniss lässt sich mit Hülfe des Grundsatzes beseitigen, dass man den Angriffspunct einer Kraft in jeden Punct ihrer Richtung verlegen kann, ohne dadurch an ihrer Wirkung etwas zu ändern, vorausgesetzt, dass der neue Angriffspunct mit dem alten fest verbunden ist. Wenn man daher von dem Puncte M auf die Richtungen der drei Kräfte die Senkrechten MD, ME, MF fället, und statt des gemeinschaftlichen Angriffspunctes C die mit diesem fest verbundenen Puncte D, E, F dieser Senkrechten als die Angriffspuncte betrachtet, so ist die Richtung jeder Kraft senkrecht zu ihrer neuen Angriffsebene, ohne dass sich ihr Drehungsbestreben geändert hat. Setzt man nun $CD = x$; $CE = y$; $MF = z$; so sind nach Nr. 9, die auf die Entfernung 1 reducirten Drehungsbestrebungen

$$Rx;\ R'y;\ P'z.$$

Nun ist aber vermöge der angenommenen Lage von M das Drehungsbestreben von R' denen von R und P' entgegengesetzt; man hat also für den Fall, dass sich die Drehungsbestrebungen gegen einander aufheben,

$$Rx + P'z - R'y = 0;$$

oder wenn man z durch x, y und Θ ausdrückt

$$Rx + P'(y\cos\Theta - x\sin\Theta) - R'y = 0;$$

oder nach x und y geordnet,

$$(R - P'\sin\Theta)\,x - (R' - P'\cos\Theta)\,y = 0.$$

Sobald nun diese Gleichung befriedigt ist, findet mit Hülfe der durch die Coordinaten x, y bestimmten Achse Gleichgewicht Statt. Wenn aber für jede Achse Gleichgewicht Statt finden, also die Gleichung für jeden Werth von x und y befriedigt seyn soll, so müssen die Coefficienten dieser Grössen Null seyn, woraus

$$R = P' \sin \Theta, \quad R' = P' \cos \Theta$$

folgt. Es ist also, wenn die Richtung einer Kraft P mit ihrer Angriffsebene den Winkel Θ macht, und r die Entfernung ihres Angriffspunctes von der Achse ist,

$$Q = P r \sin \Theta,$$

das auf die Entfernung 1 von der Achse reducirte Drehungsbestreben der Kraft P. Dieses auf die Entfernung 1 reducirte Drehungsbestreben einer Kraft nennt man ihr statisches Moment.

20. Mit Hülfe des zuletzt gefundenen Resultates ist man im Stande für eine gegebene Achse die Drehungsbestrebungen sämmtlicher, an einem Systeme angebrachten Kräfte auf eine einzige Kraft zu reduciren, welche, wenn sie in der Entfernung 1, senkrecht zu ihrer Angriffsebene angebracht werden soll, der Summe der statischen Momente gleich ist. Hieraus ist klar, dass, wenn das System mit Hülfe der gegebenen Achse im Gleichgewichte seyn soll, die Summe der statischen Momente Null seyn muss, und dass also, wenn r', r'', r''',.. die Entfernungen der Angriffspuncte der Kräfte P', P'', P''',.. von der Achse, und Θ', Θ'', Θ''' .. die Winkel bezeichnen, welche ihre Richtungen mit ihren Angriffsebenen machen, die Gleichung

$$P' r' \sin \Theta' + P'' r'' \sin \Theta'' + \ldots = 0,$$

die Bedingung des Gleichgewichtes um die gegebene Achse ausdrückt.

21. Um diese Gleichung zu dem vorliegenden Zwecke brauchbar zn machen, müssen die Producte $r' \sin \Theta'$, $r'' \sin \Theta''$,.. mit Hülfe der analytischen Geometrie durch solche Grössen ausgedrückt werden, durch welche man die Lage der Achse, die Angriffspuncte und Richtungen der Kräfte auf eine allgemeine Art angeben kann.

Es seyen

$$x = az + \alpha$$
$$y = bz + \beta$$

die Gleichungen der Achse; x', y', z' die Coordinaten des Angriffspunctes der Kraft P'; so ist (Littrow's anal. Geom. S. 66)

$$r' = \sqrt{\frac{(x' - az' - \alpha)^2 + (y' - bz' - \beta)^2 + [b(x' - \alpha) - a(y' - \beta)]^2}{a^2 + b^2 + 1}}$$

Es seyen

$$x = a'z + \alpha'$$
$$y = b'z + \beta'$$

die Gleichungen der Richtung der Kraft P', und

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sey die Gleichung der Angriffsebene; so ist (Littrow S. 47)

$$\sin \Theta' = \frac{Aa' + Bb' + C}{\sqrt{(a'^2 + b'^2 + 1)} \cdot \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}.$$

Da nun die Gleichung der Angriffsebene auch

$$(x - x')(y' - bz' - \beta) - (y - y')(x' - az' - \alpha)$$
$$+ (z - z')[b(x' - \alpha) - a(y' - \beta)] = 0$$

ist, (Littrow, S. 64), so hat man

$$A = y' - bz' - \beta;$$
$$B = -(x' - az' - \alpha);$$
$$C = b(x' - \alpha) - a(y' - \beta);$$
$$\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$$
$$= \sqrt{\{(x' - az' - \alpha)^2 + (y' - bz' - \beta)^2 + [b(x' - \alpha) - a(y' - \beta)]^2\}},$$

und folglich

$$r' \sin \Theta' = \frac{a'(y' - bz' - \beta) - b'(x' - az' - \alpha) + b(x' - \alpha) - a(y' - \beta)}{\sqrt{(a'^2 + b'^2 + 1)} \cdot \sqrt{(a^2 + b^2 + 1)}}.$$

22. Um jetzt statt der Grössen a, a',... die Winkel einzuführen, welche die Achse und die Richtungen der Kräfte mit den Coordinaten machen, seyen l, m, n die Coordinaten eines in der Achse liegenden Punctes; λ, μ, ν die Winkel, welche die Achse, und α', β', γ' die Winkel, welche die Richtung der Kraft P' mit den Achsen der x, y, z macht. Die Gleichungen der Achse sind alsdann (Littrow S. 34)

$$x - l = \frac{\cos \lambda}{\cos \nu}(z - n),$$
$$y - m = \frac{\cos \mu}{\cos \nu}(z - n),$$

und die Gleichungen der Richtung der Kraft P'

$$x - x' = \frac{\cos \alpha'}{\cos \gamma'}(z - z'),$$
$$y - y' = \frac{\cos \beta'}{\cos \gamma'}(z - z').$$

Aus der Zusammenstellung dieser Gleichungen mit den in Nr. 21 gebrauchten ergibt sich

$$a = \frac{\cos \lambda}{\cos \nu}; \qquad \alpha = l - n\frac{\cos \lambda}{\cos \nu};$$
$$b = \frac{\cos \mu}{\cos \nu}; \qquad \beta = m - n\frac{\cos \mu}{\cos \nu};$$
$$a' = \frac{\cos \alpha'}{\cos \gamma'}; \qquad b' = \frac{\cos \beta'}{\cos \gamma'}.$$

Es ist also

$$a'(y'-bz'-\beta)=\frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'}\left\{y'-z'\frac{\cos\mu}{\cos\nu}-\left(m-n\frac{\cos\mu}{\cos\nu}\right)\right\};$$

$$b'(x'-az'-\alpha)=\frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'}\left\{x'-z'\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}-\left(l-n\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}\right)\right\};$$

$$b(x'-\alpha)=\frac{\cos\mu}{\cos\nu}\left\{x'-\left(l-n\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}\right)\right\};$$

$$a(y'-\beta)=\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}\left\{y'-\left(m-n\frac{\cos\mu}{\cos\nu}\right)\right\};$$

$$b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)=\frac{\cos\mu}{\cos\nu}x'-\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}y'-\left(\frac{\cos\mu}{\cos\nu}l-\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}m\right);$$

$$a^2+b^2+1=\frac{\cos^2\alpha'}{\cos^2\gamma'}+\frac{\cos^2\beta'}{\cos^2\gamma'}+1=\frac{1}{\cos^2\gamma};$$

$$a^2+b^2+1=\frac{\cos^2\lambda}{\cos 2}+\frac{\cos^2\mu}{\cos^2\nu}+1=\frac{1}{\cos^2\nu};$$

$$\sqrt{(a'^2+b'^2+1)}\cdot\sqrt{(a^2+b^2+1)}=\frac{1}{\cos\gamma'\cos\nu};$$

folglich hat man

$$r'\sin\Theta'=\cos\nu\cos\alpha'\left\{y'-z'\frac{\cos\mu}{\cos\nu}-\left(m-n\frac{\cos\mu}{\cos\nu}\right)\right\}$$
$$-\cos\nu\cos\beta'\left\{x'-z'\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}-\left(l-n\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}\right)\right\}$$
$$+\cos\mu\cos\gamma'(x'-l)-\cos\lambda\cos\gamma'(y'-m);$$

oder auf folgende Art geordnet,

$$\begin{aligned}r'\sin\Theta' &= \cos\alpha'(n\cos\mu-m\cos\nu)\\ &+\cos\beta'(l\cos\nu-n\cos\lambda)\\ &+\cos\gamma'(m\cos\lambda-l\cos\mu)\\ &+(z'\cos\beta'-y'\cos\gamma')\cos\lambda\\ &+(x'\cos\gamma'-z'\cos\alpha')\cos\mu\\ &+(y'\cos\alpha'-x'\cos\beta')\cos\nu.\end{aligned}$$

23. Da nun ganz ähnliche Ausdrücke für $r''\sin\Theta''$;

$r'''\sin\theta'''$; .... Statt finden, so verwandelt sich die in Nr. 20 aufgestellte Gleichung in folgende:

$$(P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + ..)(n\cos\alpha - m\cos\nu)$$
$$+ (P'\cos\beta' + P'\cos\beta'' + ..)(l\cos\nu - n\cos\lambda)$$
$$+ (P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + ..)(m\cos\lambda - l\cos\mu)$$
$$+ [P'(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma') + P''(z''\cos\beta'' - y''\cos\gamma'') + ..]\cos\lambda$$
$$+ [P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + P''(x''\cos\gamma'' - z''\cos\alpha'') + ..]\cos\mu$$
$$+ [P'(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta') + P''(y''\cos\alpha'' - x''\cos\beta'') + ..]\cos\nu = o.$$

24. Diese Gleichung muss also befriedigt seyn, wenn Gleichgewicht um die durch die Grössen l, m, n, λ, μ, ν bestimmte Achse Statt finden soll. Sollte das System um jede Achse im Gleichgewichte seyn, so müsste auch dieser Gleichung durch jeden Werth von l, m, n, λ, μ, ν Genüge geschehen. Da dieses nun nicht anders möglich ist, als wenn die Coefficienten der aus diesen Grössen zusammengesetzten Ausdrücke einzeln null sind, so hat man folgende sechs Gleichungen für das Gleichgewicht eines freien Systems:

$$P'\cos\alpha' + P''\cos\beta'' + .. = o;$$
$$P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + .. = o;$$
$$P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + .. = o:$$
$$P'(z'\cos\beta - y'\cos\gamma') + P''(z''\cos\beta'' - y''\cos\gamma'') + .. = o;$$
$$P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + P''(x''\cos\gamma'' - z''\cos\alpha'') + .. = o;$$
$$P'(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta') + P''(y''\cos\alpha'' - x''\cos\beta'') + .. = o.$$

Discussion der Gleichungen in Nr. 23 und 24.

25. Der Bequemlichkeit wegen soll von jetzt an

$$P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + .. = X;$$
$$P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + .. = Y;$$
$$P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + .. = Z;$$
$$P'(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma') + .. = L;$$

$$P'(x'\cos\alpha' - z'\cos\alpha') + \ldots = M;$$
$$P'(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta') + \ldots = N;$$

gesetzt werden, wodurch sich die Gleichung in Nr. 23 in folgende verwandelt:

$$\begin{aligned} &X(n\cos\mu - m\cos\nu) \\ &+ Y(l\cos\nu - n\cos\lambda) \\ &+ Z(m\cos\lambda - l\cos\mu) \\ &+ L\cos\lambda \\ &+ M\cos\mu \\ &+ N\cos\nu = 0 \quad \ldots\ldots \quad (A) \end{aligned}$$

26. Setzt man in dieser Gleichung $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$, so erhält man

$$L\cos\lambda + M\cos\mu + N\cos\nu = 0$$

als Bedingung, dass keine Drehung um die durch den Ursprung der Coordinaten gehende Achse entsteht, welche mit den Coordinaten die Winkel λ, μ, ν macht. Wenn also um keine durch den Ursprung der Coordinaten gehende Achse eine Drehung Statt finden soll, so muss zugleich

$$L = 0;\ M = 0;\ N = 0$$

seyn. Die Gleichung reducirt sich aber auf $L = 0$, oder auf $M = 0$, oder auf $N = 0$, je nachdem man $\lambda = 0$, oder $\mu = 0$, oder $\nu = 0$ setzt und dadurch die Achse der x, oder die Achse der y, oder die Achse der z zur Achse macht. $L = 0$ ist also die Bedingung, dass keine Drehung um die Achse der x; $M = 0$, dass keine Drehung um die Achse der y, und $N = 0$, dass keine Drehung um die Achse der z entsteht. Die Bedingung, dass um keine Achse, die durch den Ursprung der Coordinaten geht, eine Drehung soll entstehen können, ist also erfüllt, wenn

um keine der drei zu einander senkrechten coordinirten Achsen eine Drehung entstehen kann.

27. Um zu sehen was aus der Gleichung (A) wird, wenn man die Achse so weit entfernt, dass eine drehende Bewegung um dieselbe als eine fortschreitende angesehen werden kann, setze man kl, km, kn statt l, m, n, und dividire die Gleichung durch k, so erhält man

$$\begin{aligned} & X(n\cos\mu - m\cos\nu) \\ + & Y(l\cos\nu - n\cos\lambda) \\ + & Z(m\cos\lambda - l\cos\mu) \\ + & L\frac{\cos\lambda}{k} + M\frac{\cos\mu}{k} + N\frac{\cos\nu}{k} = 0, \end{aligned}$$

eine Gleichung, welche für jeden Werth von k, l, m, n Statt finden muss, wenn um die durch kl, km, kn, λ, μ, ν bestimmte Achse keine Drehung entstehen soll.

Macht man nun k unendlich gross, so verschwinden die drei letzten Glieder, und man erhält

$$\begin{aligned} & X(n\cos\mu - m\cos\nu) \\ + & Y(l\cos\nu - n\cos\lambda) \\ + & Z(m\cos\lambda - l\cos\mu) = 0 \end{aligned}$$

als Bedingung, dass keine Drehung um die unendlich weit entfernte, durch kl, km, kn, λ, μ, ν bestimmte Achse entstehen kann. Wenn also um keine unendlich weit entfernte Achse eine Drehung, das heisst, wenn nach keiner Richtung eine fortschreitende Bewegung entstehen soll, so muss zugleich

$$X = 0;\ Y = 0;\ Z = 0$$

seyn. Die Gleichung reducirt sich aber auf $X = 0$, oder auf $Y = 0$, oder auf $Z = 0$, je nachdem man

$l = 0$, $\lambda = \frac{\pi}{2}$, oder $m = 0$, $\mu = \frac{\pi}{2}$, oder $n = 0$,

$\gamma = \frac{\pi}{2}$ setzt und dadurch die unendlich weit entfernte Achse in die Ebene der yz, oder in die Ebene der xz, oder in die Ebene der xy legt. $X = o$ ist also die Bedingung, dass keine Bewegung parallel mit der Achse der x, $Y = o$, dass keine Bewegung parallel mit der Achse der y, und $Z = o$, dass keine Bewegung parallel mit der Achse der z entsteht. Die Bedingung, dass nach keiner Richtung eine fortschreitende Bewegung soll entstehen können, ist also erfüllt, wenn keine mit einer der drei zu einander senkrechten coordinirten Achsen parallele Bewegung entstehen kann.

28. Um die Bedeutung der sechs Gleichungen in Nr. 24 noch auf eine andere Art ausdrücken zu können, ist es nöthig zu wissen, was die Producte $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ vorstellen, welche von jeder Kraft auf die nämliche Art in allen diesen Gleichungen vorkommen. Man gelangt hierzu durch Anwendung dieser Gleichungen auf folgenden besondern Fall:

Es seyen P', P'', P''' drei zu einander senkrechte mit den Coordinaten parallele Kräfte, welche in einem gemeinschaftlichen Angriffspuncte mit einer vierten Kraft R im Gleichgewichte sind, so hat man

$$\alpha' = o; \ \beta' = \frac{\pi}{2}; \ \gamma' = \frac{\pi}{2};$$

$$\alpha'' = \frac{\pi}{2}; \ \beta'' = o; \ \gamma'' = \frac{\pi}{2};$$

$$\alpha''' = \frac{\pi}{2}; \ \beta''' = \frac{\pi}{2}; \ \gamma''' = o;$$

und folglich

$$\cos\alpha' = 1;\ \cos\beta' = 0;\ \cos\gamma' = 0;$$
$$\cos\alpha'' = 0;\ \cos\beta'' = 1;\ \cos\gamma'' = 0;$$
$$\cos\alpha''' = 0;\ \cos\beta''' = 0;\ \cos\gamma''' = 1.$$

Wenn nun die vierte Kraft R die Winkel a, b, c mit den Coordinaten macht, so geben die drei ersten der sechs Gleichungen in Nr. 24,

$$P' + R\cos a = 0;$$
$$P'' + R\cos b = 0;$$
$$P''' + R\cos c = 0,$$

und die drei übrigen fallen weg, weil sie von selbst befriedigt werden, sobald diese befriedigt sind, oder auch dadurch, dass man den gemeinschaftlichen Angriffspunct zum Ursprunge der Coordinaten wählt. Man hat also

$$P' = -R\cos a;$$
$$P'' = -R\cos b;$$
$$P''' = -R\cos c.$$

Da nun die Kraft R mit einer gleichen und gerade entgegengesetzten Kraft P ebenfalls im Gleichgewichte ist, so muss es in Beziehung auf das Gleichgewicht des gemeinschaftlichen Angriffspunctes einerlei seyn, ob die Kraft P oder die drei Kräfte P', P'', P''' angebracht sind. Es ist aber, wenn α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Richtung von P mit den Coordinaten macht,

$$a = \pi - \alpha;\ b = \pi - \beta;\ c = \pi - \gamma;$$

und folglich

$$\cos a = -\cos\alpha;\ \cos b = -\cos\beta;\ \cos c = -\cos\gamma.$$

Hierdurch, und weil $R = P$ ist, erhält man

$$P' = P\cos\alpha;\ P'' = P\cos\beta;\ P''' = P\cos\gamma,$$

woraus man sieht, dass die Producte $P \cos \alpha$, $P \cos \beta$, $P \cos \gamma$, drei mit den zu einander senkrechten Achsen der Coordination parallele Kräfte vorstellen, welche in dem Angriffspuncte von P angebracht, diese Kraft ersetzen.

29. Eine Kraft P durch einige andere P', P'',.. ersetzen, heisst die Kraft P in diese zerlegen, und einige Kräfte P', P'',.. durch eine einzige P ersetzen, heisst die Kräfte P', P'', zusammensetzen. In dieser Beziehung nennt man auch die Kraft P die Resultante, und die Kräfte P', P'',.. die Composanten.

Denkt man sich demnach jede Kraft parallel mit den Achsen der Coordinaten zerlegt, und bezeichnet die Composanten von P' mit X', Y', Z'; die von P'' mit X'', Y'', Z'' u. s. w., so kann man die sechs Gleichungen Nr. 24 auf folgende Art schreiben:

$$X' + X'' + \ldots = 0;$$
$$Y' + Y'' + \ldots = 0;$$
$$Z' + Z'' + \ldots = 0; \qquad (B)$$
$$Y'z' - Z'y' + Y''z'' - Z''y'' + \ldots = 0;$$
$$Z'x' - X'z' + Z''x'' - X''z'' + \ldots = 0;$$
$$X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + \ldots = 0,$$

wo dann die drei ersten ausdrücken, dass für jede der drei coordinirten Achsen die Summe der mit ihr parallelen Composanten null seyn muss.

30. Um die drei letzten Gleichungen zu erklären, sey E, (Fig. 29) der Angriffspunct der Kraft P'; EX', EY', EZ' seyen die mit den coordinirten Achsen AB, AC, AD parallelen Richtungen der Composanten X', Y', Z' von P'; F, G, H seyen die Puncte, in welchen diese Richtungen verlängert, den coordinirten Ebenen begegnen; I, K, L die Fusspuncte der von F, G, H

auf die coordinirten Achsen gefällten Senkrechten. Wählt man jetzt statt des gemeinschaftlichen Angriffspunctes E der Composanten, die in ihren Richtungen liegenden Puncte F, G, H zu ihren Angriffspuncten, so sieht man, dass

$$Y'z' = Y'.GI,$$

$$Z'y' = Z'.HI$$

die statischen Momente der Composanten Y', Z' in Beziehung auf die Achse der x sind, und dass diese Momente entgegengesetzte Zeichen haben müssen. Es ist also, weil X' mit der Achse der x parallel wirkt, und folglich kein Drehungsbestreben um dieselbe hat,

$$Y'x' - Z'y'$$

die Summe der von den Composanten von P' herrührenden statischen Momente in Beziehung auf die Achse der x. Eben so ist, wie man leicht aus der Figur entnehmen kann, $Z'x' - X'z'$ die Summe der statischen Momente dieser Composanten in Beziehung auf die Achse der y, und $X'y' - Y'x'$ in Beziehung auf die Achse der z. Die drei letzten der sechs Gleichungen (B) drücken also aus, dass für jede der drei coordinirten Achsen die Summe der statischen Momente aller Composanten null seyn muss.

II. Analytische Uebungen. *)

a). Bestimmung des zum Zeiger n gehörenden Gliedes einer Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4, \ldots u_n, \ldots$$

durch das erste Glied u_0 derselben, durch die Anfangsglieder

$$\Delta u_0,\ \Delta^2 u_0,\ \Delta^3 u_0, \ldots \Delta^{r-1} u_0$$

ihrer $r-1$ ersten Differenzreihen, und durch die $n-r+1$ ersten Glieder

$$\Delta^r u_0,\ \Delta^r u_1,\ \Delta^r u_2,\ \Delta^r u_3, \ldots \Delta^r u_{n-r}$$

ihrer rten Differenzreihe, vorausgesetzt, dass $n > r$ ist.

Bekanntlich ist

$$(1)\quad u_n = u_0 + \binom{n}{1} \Delta u_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 u_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 u_0 + \ldots + \binom{n}{r-1} \Delta^{r-1} u_0 + \binom{n}{r} \Delta^r u_0 + \binom{n}{r+1} \Delta^{r+1} u_0 + \binom{n}{r+2} \Delta^{r+2} u_0 + \ldots + \Delta^n u_0$$

wenn man durch $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$, etc. ... die Bi-

*) Unter dieser Ueberschrift werde ich in gegenwärtiger Zeitschrift einen fortlaufenden, theils Anfängern im Studium der höheren Mathematik, theils denjenigen, welche sich mit dem Unterrichte in dieser Wissenschaft beschäftigen, gewidmeten Artikel unterhalten, in welchem ich Verbesserungen, Erweiterungen, Veränderungen analytischer Entwickelungen, zumal solche, die bereits an unserer Lehranstalt einheimisch geworden sind, oder doch zu abgesonderten Aufsätzen nicht Stoff genug darbieten, bekannt zu machen gedenke.

v. Ettingshausen.

nomialçoefficienten für den Exponenten n, nämlich

$$n,\ \frac{n(n-1)}{1.2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\ \text{etc.}$$

vorstellt. Ferner ist

$$\Delta^m u_0 = u_m - \binom{m}{1} u_{m-1} + \binom{m}{2} u_{m-2} - \ldots \ldots + (-1)^m u_0$$

also auch, in so fern man die rte Differenzreihe selbst wieder als Hauptreihe betrachtet:

$$(2)\quad \Delta^{r+m} u_0 = \Delta^r u_m - \binom{m}{1} \Delta^r u_{m-1} + \binom{m}{2} \Delta^r u_{m-2} - \ldots + (-1)^m \Delta^r u_0$$

Setzt man hier nach und nach m = 1, 2, 3 . . . n — r, so ergibt sich

$$\Delta^{r+1} u_0 = \Delta^r u_1 - \Delta^r u_0$$

$$\Delta^{r+2} u_0 = \Delta^r u_2 - \binom{2}{1} \Delta^r u_1 + \Delta^r u_0$$

$$\Delta^{r+3} u^0 = \Delta^r u_3 - \binom{3}{1} \Delta^r u_2 + \binom{3}{2} \Delta^r u_1 - \Delta^r u_0$$

. . . .

$$\Delta^n u_0 = \Delta^r u_{n-r} - \binom{n-r}{1} \Delta^r u_{n-r-1} + \binom{n-r}{2} \Delta^r u_{n-r-2} - \ldots + (-1)^{n-r} \Delta^r u^0.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Formel (1), so wird, wenn man alles nach den Differenzen der Glieder der Hauptreihe ordnet:

$$(3)\ u_n = u_0 + \binom{n}{1} \Delta u_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 u_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 u_0 + \ldots + \binom{n}{r-1} \Delta^{r-1} u + \left[\binom{n}{r} - \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r+2} - \binom{n}{r+3} + \ldots + (-1)^{n-r}\right] \Delta^r u_0$$

$$+\left[\binom{n}{r+1}-\binom{2}{1}\binom{n}{r+2}+\binom{3}{2}\binom{n}{r+3}\right.$$
$$\left.-\ldots+(-1)^{n-r-1}\binom{n-r}{n-r-1}\right]\Delta^r u_1$$
$$+\left[\binom{n}{r+2}-\binom{3}{1}\binom{n}{r+3}+\binom{4}{2}\binom{n}{r+4}\right.$$
$$\left.-\ldots+(-1)^{n-r-2}\binom{n-r}{n-r-1}\right]\Delta^r u_2$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\left[\binom{n}{n-1}-\binom{n-r}{1}\right]\Delta^r u_{n-r-1}\ .$$
$$\Delta^r u_{n-r}$$

Das in diesem Ausdrucke herrschende Gesetz ist leicht zu übersehen. Der Coefficient von $\Delta^r u_w$ ist

$$(4)\quad \binom{n}{r+w}-\binom{w+1}{1}\binom{n}{r+w+1}\binom{w+2}{2}\binom{n}{r+w+2}$$
$$+\ldots+(1)^{n-r-w}\binom{n-r}{n-r-w}$$

Dieses Polynom lässt sich auf mehrere Arten in einen einfachen Ausdruck verwandeln. So z. B. ist es nicht schwer sich zu überzeugen, dass dasselbe den Coefficienten von x^{r+w} in der nach dem binomischen Lehrsatze vollzogenen Entwickelung des Productes

$$(1+x)^n\ .\ (1+x)^{-(w+1)}$$

darstellt. Da nun dieses Product auch

$$=(1+x)^{n-w-1}$$

ist, so erhält man für das Polynom (4) auch den Ausdruck

$$\binom{n-w-1}{r-1}$$

Auf directem Wege gelangt man zur Summe des Ausdruckes (4), wenn man die Binomial-Coefficienten ihren Fundamental-Eigenschaften gemäss transformirt.

Viele Reductionen dieser Gattung findet man in der Schrift: „Die combinatorische Analysis etc.“ Wien 1826.

Wir wollen uns indessen zur Erreichung dieses Zweckes einer merkwürdigen von Gauss in den Comment. soc. reg. scient. Gottingensis recent. Vol. II. „Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc.“ vorgetragenen Formel bedienen.

Bezeichnet man nämlich die Gränze, welcher sich das Product

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\,.\,.\, n \,.\, n^z}{(z + 1)(z + 2)(z + 3) \,.\,.\,.\, (z + n)}$$

bei dem unendlichen Wachsen der ganzen positiven Zahl n für jeden Werth von z (ganze negative Zahlen ausgenommen) unendlich nähert, durch

$$\Pi\ (z),$$

so ist die Summe der unendlichen Reihe

$$(5)\quad 1 + \frac{\alpha \,.\, \beta}{1 \,.\, \gamma} + \frac{\alpha(\alpha + 1) \,.\, \beta(\beta + 1)}{1 \,.\, 2 \,.\, \gamma(\gamma + 1)} + \frac{\alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \,.\, \beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, \gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2)} + \text{etc.}$$

vorausgesetzt, dass diese Reihe convergirt, was nur dann Statt findet, wenn $\alpha + \beta - \gamma$ negativ ausfällt,

$$(6)\quad = \frac{\Pi(\gamma - 1) \,.\, \Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1) \,.\, \Pi(\gamma - \beta - 1)}$$

Das Polynom (4) kann, wenn man die Bedeutung der Binomial-Coefficienten gehörig berücksichtiget, auf die Form

$$\binom{n}{r+w}\Big[1 - \frac{(w + 1)(n - r - w)}{1 \,.\, (r + w + 1)} + \frac{(w + 1)(w + 2) \,.\, (n - r - w)(n - r - w - 1)}{1 \,.\, 2\, (r + w + 1)(r + w + 2)} - \text{etc.}\Big]$$

gebracht werden. Der Ausdruck innerhalb der Klam-

mern stimmt mit (5) überein, wenn man $\alpha = w + 1$, $\beta = -n + r + w$, $\gamma = r + w + 1$ annimmt, und ist, der Formel (6) gemäss

$$(7) \qquad = \frac{\Pi(r + w) \,.\, \Pi(n - w - 1)}{\Pi(r - 1) \,.\, \Pi(n)}$$

Aber $\Pi(z)$ ist offenbar auch die Grenze; an welche die Grösse

$$\frac{1}{z + 1} \,.\, \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\,.\,.\, n \,.\, n^{r+1}}{(z + 2)(z + 3)(z + 4) \,.\,.\,.\, (z + n + 1)}$$

bei dem unendlichen Wachsen von n gebunden ist; daher besteht die Gleichung

$$\Pi(z) = \frac{1}{z + 1} \,.\, \Pi(z + 1)$$

oder $\dfrac{\Pi(z + 1}{\Pi(z)} = z + 1$

aus welcher, wenn g eine ganze positive Zahl bedeutet, sogleich

$$(8) \quad \frac{\Pi(z + g)}{\Pi(z)} = (z + 1)(z + 2) \,.\,.\,.\, (z + g)$$

erhalten wird. Die Formel (8) auf das Resultat (7) angewendet, gibt

$$\frac{\Pi(r + w)}{\Pi(r - 1)} = r(r + 1)(r + 2 \,.\,.\,.\, (r + w)$$

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n - w \;\; 1)} = (n - w)(n - w + 1) \ldots (n - 1)n$$

wodurch man die Summe des Polynoms (4)

$$= \binom{n}{r + w} \,.\, \frac{r(r + 1) \ldots (r + w)}{(n - w)(n - w + 1) \ldots n} = \binom{n - w - 1}{r - 1}$$

findet.

Hierdurch geht der Ausdruck (3) in die verlangte Formel

$$(9)\quad u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta u_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 u_0 + \ldots + \binom{n}{r-1}\Delta^{r-1} u_0$$
$$+ \binom{n-1}{r-1}\Delta^r u_0 + \binom{n-2}{r-1}\Delta^r u_1 + \binom{n-3}{r-1}\Delta^r u_2 + \ldots + \binom{r}{r-1}\Delta^r u_{n-r-1} + \Delta^r u_{n-r}$$

über.

Um eine Anwendung dieser Formel zu zeigen, betrachten wir ein beliebiges Glied einer der aus der Hauptreihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ u_n$$

entspringenden Summenreihen. Es ist nämlich die Reihe

$$u_0,\ u_0 + u_1,\ u_0 + u_1 + u_2,\ u_0 + u_1 + u_2 + u_3,$$

die erste Summenreihe der erwähnten Hauptreihe, aus welcher nach demselben Gesetze eine zweite, dritte, u. s. w. abgeleitet werden kann.

Da $u_n = u_{n-1} + \Delta u_{n-1}$, $u_{n-1} = u_{n-2} + \Delta u_{n-2}$ etc. ist, so hat man

$$u_n = u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3 + \ldots + \Delta u_{n-1}$$

woraus hervor geht, dass eine Hauptreihe deren Anfangsglied $u_0 = 0$ ist, als die Summenreihe ihrer ersten Differenzreihe angesehen werden kann, und zwar entspricht das mit dem Zeiger n versehene Glied der Hauptreihe, dem den Zeiger $n-1$ führenden Gliede der Differenzreihe. Aber von der ersten Differenzreihe kann in Bezug auf die zweite Differenzreihe ein Gleiches gesagt werden; daher ist die Hauptreihe die rte Summenreihe ihrer rten Differenzreihe, wenn u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, ... $\Delta_{r-1} u_0$ verschwinden, oder was dasselbe ist, wenn die r Anfangsglieder u_0, u_1,

$u_2, u_3, \ldots u_{r-1}$ der Hauptreihe gleich Null sind. Unter dieser Voraussetzung gibt die Formel (9)

$$(10)\quad u_n = \binom{n-1}{r-1}\Delta^r u_0 + \binom{n-2}{r-1}\Delta^r u_1 + \binom{n-3}{r-1}\Delta^r u_2 + \ldots + \binom{r}{r-1}\Delta^r u_{n-r-1} + \Delta^r u_{n-r}$$

Bezeichnen wir die Glieder der rten Summenreihe für die Grundreihe

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$$

durch $S^r u_0$, $S^r u_1$, $S^r u_2$, $S^r u_3 \ldots S^r u_n$ so haben wir, wenn wir in (10) $n+r$ statt n und u_0, u_1, u_2, $u_3 \ldots$ statt $\Delta^r u_0$, $\Delta^r u_1$, $\Delta^r u_2$, $\Delta^r u_3, \ldots$ schreiben,

$$(11)\quad S^r u_n = \binom{n+r-1}{r-1}u_0 + \binom{n+r-2}{r-1}u_1 + \binom{n+r-3}{r-1}u_2 \ldots + \binom{r}{r-1}u_{n-1} + u_n$$

oder, was dasselbe ist

$$(12)\quad S^r u_n = u_n + r u_{n-1} + \frac{r(r+1)}{1\,.\,2}u_{n-2} + \frac{r(r+1)(r+2)}{1\,.\,2\,.\,3}u_{n-3} + \ldots + \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}u_0$$

b) Ausdruck für das zum Zeiger n gehörende Glied u_n einer arithmetischen Reihe

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots u_n, \ldots$$

vom $m$ten Range durch die $m+1$ Anfangsglieder derselben.

Euler hat bereits in seinen Institut. calculi differentialis pag. 44 etc. das Bildungsgesetz dieses Ausdruckes angedeutet, jedoch dasselbe bloss auf Induction gegründet. Folgende Betrachtungen führen zu einem allgemeinen Beweise desselben.

Es ist für die vorliegende arithmetische Reihe nach der obigen Formel (1)

$$u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta u_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 u_0 + \cdots + \binom{n}{m}\Delta^m u_0$$

weil die höheren Differenzen $\Delta^{m+1}u_0$, $\Delta^{m+2}u_0$, ... bei einer Reihe vom $m$ten Range verschwinden.

Setzt man hier $u_1 - u_0$, $u_2 - \binom{2}{1}u_1 + u_0$, $u_3 - \binom{3}{1}u_2 + \binom{3}{2}u_1 - u_0$, etc. statt Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, etc., so wird

$$(13)\quad u_n = u_0\left[1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots (-1)^m \binom{n}{m}\right]$$
$$+ u_1\left[\binom{n}{1} - \binom{2}{1}\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}\binom{n}{m}\right]$$
$$+ u_2\left[\binom{n}{2} - \binom{3}{1}\binom{n}{5} + \binom{4}{2}\binom{n}{4} - \ldots + (-1)^{m-2}\binom{m}{m-2}\binom{n}{m}\right]$$
$$+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$+ u_{m-1}\left[\binom{n}{m-1} - \binom{m}{1}\binom{n}{m}\right]$$
$$+ u_m \binom{n}{m}$$

Der Coefficient von u_r in diesem Ausdrucke ist

$$\binom{n}{r} - \binom{r+1}{1}\binom{n}{r+1} + \binom{r+2}{2}\binom{n}{r+2} - \ldots + (-1)^{m-r}\binom{m}{m-r}\binom{n}{m}$$

Man hat aber allgemein

$$\binom{r+p}{p}\binom{n}{r+p} = \frac{(r+p)(r+p-1)\ldots(r+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots p} \times$$

$$\times . \frac{n(n-1)\ldots(n-r-p+1)}{1.2\ \ldots\ (r+p)}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r-p+1)}{1.2.3\ldots p.1.2.3\ldots r}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots r} \times$$

$$\times . \frac{(n-r)\ldots(n-r-p+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots p}$$

$$= \binom{n}{r}\binom{n-r}{p}$$

folglich ist der genannte Coefficient

$$= \binom{n}{r}\left[1 - \binom{n-r}{1} + \binom{n-r}{2} - \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{m-r}\binom{n-r}{m-r}\right]$$

Der Beschaffenheit der Binomialcoefficienten gemäss ist allgemein

$\binom{n-r}{q} - \binom{n-r-1}{q-1} = \binom{n-r-1}{q}$, also wegen

$$1 - \binom{n-r}{1} = -\binom{n-r-1}{1}$$

$$1 - \binom{n-r}{1} + \binom{n-r}{2} = \binom{n-r}{2} - \binom{n-r-1}{1} = \binom{n-r-1}{2}$$

und eben so

$$1 - \binom{n-r}{1} + \binom{n-r}{2} - \binom{n-r}{3} = -\binom{n-r-1}{3}$$

Daher der obige Ausdruck innerhalb der Klammern

$= (-1)^{m-r}\binom{n-r-1}{m-r}$, folglich der zu berechnende Coefficient

$$= (-1)^{m-r}\binom{n}{r}\binom{n-r-1}{m-r}$$

$$= (-1)^{m-r} . \frac{1}{n-r} . \frac{n(n-1)\ldots(n-r)(n-r-1)\ldots(n-m)}{1.2\ldots r.1.2\ldots\ldots\ldots(m-r)}$$

$$=(-1)^{m-r}.\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots r}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1.2.3\ldots\ldots m}\cdot\frac{1}{n-r}$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1.2\ldots\ldots m}\cdot(-1)^{m-r}\binom{m}{r}\cdot\frac{1}{n-r}$$

Der erste Factor gehört offenbar allen Coefficienten gemeinschaftlich zu, daher ist, wenn man die Glieder des Ausdruckes (13) in verkehrter Ordnung schreibt,

$$(14)\quad u_n=\frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1.2\ldots\ldots\ldots m}\left[\frac{u_m}{n-m}-\frac{\binom{m}{1}u_{m-1}}{n-m+1}\right.$$

$$\left.+\frac{\binom{m}{2}u_{m-2}}{n-m+2}-\ldots+(-1)^{m-1}\frac{\binom{m}{m-1}u_1}{n-1}+(-1)^m\frac{u_0}{n}\right]$$

welche Formel die verlangte ist.

c). Recursionsformeln zur Berechnung der Bernouillischen Zahlen.

Es seyen die Zahlen A_1, A_2, A_3, ... A_r, ... an die Gleichungen

$$(15)\quad 1+\binom{2}{1}A_1=0$$

$$1+\binom{3}{1}A_1+\binom{3}{2}A_2=0$$

$$1+\binom{4}{1}A_1+\binom{4}{2}A_2+\binom{4}{3}A_3=0$$

u. s. w.

$$1+\binom{r}{1}A_1+\binom{r}{2}A_2+\ldots+\binom{r}{r-1}A_{r-1}=0$$

. . . .

gebunden, auf welche man bei verschiedenen analytischen Untersuchungen kömmt, z. B. wenn man die Coefficienten in der Formel

$$\Sigma\,.\,x^m=\frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x}+A_1x^m+A_2\,.\,\frac{m}{2}\,x^{m-1}\Delta x$$

$$+A_3\,.\,\frac{m(m-1)}{1.2.3}\,x^{m-2}\,\Delta x^2+\text{etc.}$$

zu bestimmen wünscht, so lassen sich die Werthe von A_1, A_2, A_3, etc. auf bequemerem Wege, als durch unmittelbaren Gebrauch der Gleichungen (15) auf folgende Art ausmitteln.

Man behandle die Gleichungen (15) wie die Glieder einer Reihe, deren Differenzreihen zu suchen sind, so werden zur Bildung der wten Differenz für

$$(16) \quad 1 + \binom{r}{1} A_1 + \binom{r}{2} A_2 + \binom{r}{3} A_3 + \ldots \ldots , \\ \ldots + \binom{r}{r-1} A^{r-1} = 0$$

die nächsten w darauf folgenden Gleichungen, wovon

$$(17) \quad 1 + \binom{r+w}{1} A_1 + \binom{r+w}{2} A_2 + \binom{r+w}{3} A_3 + \ldots \\ \ldots + \binom{r+w}{r-1} A_{r-1} + \ldots + \binom{r+w}{r+w-1} A_{r+w-1} = 0$$

die letzte ist, in Anspruch genommen. Da die derselben vorangehenden w Gleichungen weniger Glieder enthalten, so setze man denselben die fehlenden Zahlen A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, ... mit dem Coefficienten Null verbunden, zu, so dass alle $w+1$ Gleichungen aus gleichviel Gliedern bestehen.

Stellt man nun die Gleichung (16) durch

$$1 + \binom{r}{1} A_1 + \binom{r}{2} A_2 + \ldots + \binom{r}{r-1} A_{r-1} \\ + \overset{1}{0} A_r + \overset{2}{0} A_{r+1} + \overset{3}{0} A_{r+2} + \ldots + \overset{n}{0} A_{r+w-1} = 0$$

vor, wobei die Zeiger ober den Nullen der Unterscheidung willen gebraucht werden, so ist ihre wte Differenz

$$A_1 \Delta^w \binom{r}{1} + A_2 \Delta^w \binom{r}{2} + \ldots + A_{r-1} \Delta^w \binom{r}{r-1} \\ + A_r \Delta^w . \overset{1}{0} + A_{r+1} \Delta^w . \overset{2}{0} + \ldots + A_{r+t-1} \Delta^w . \overset{t}{0} + \ldots \\ \ldots + A_{r+w-1} \Delta^w . \overset{w}{0} = 0$$

Nun ist überhaupt

$$\Delta \binom{r}{k} = \binom{r+1}{k} - \binom{r}{k} = \binom{r}{k-1} \text{ folglich}$$

$$\Delta^2 \binom{r}{k} = \Delta \binom{r}{k-1} = \binom{r}{k-2} \text{ u. s. w. und}$$

$$\Delta^w \binom{r}{k} = \binom{r}{k-w}$$

woraus erhellet, dass $\Delta^w \binom{r}{k}$ verschwindet, sobald $w > k$ ist.

Ferner hat man, weil der obigen Bezeichnung gemäss $\Delta^w . \overset{t}{0}$ das erste Glied der wten Differenzreihe einer Hauptreihe vorstellt, welche mit t Nullen anfängt, und deren folgende Glieder

$$\binom{r+t}{r+t-1},\ \binom{r+t+1}{r+t-1},\ \binom{r+t+2}{r+t-1},\ \ldots\ \binom{r+w}{r+t-1}$$

sind,

$$\Delta^w . \overset{t}{0} = \binom{r+w}{r+t-1} - \binom{w}{1}\binom{r+w-1}{r+t-1} + \binom{w}{2}\binom{r+w-2}{r+t-1} - \ldots$$

$$\ldots (-1)^{w-t} \binom{w}{w-t} \binom{r+t}{r+t-1}$$

Aber es ist einerseits $\Delta^w \binom{r}{k} = \binom{r}{k-w}$, und andererseits

$$\Delta^w \binom{r}{k} = \binom{r+w}{k} - \binom{w}{1}\binom{r+w-1}{k} + \binom{w}{2}\binom{r+w-2}{k} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^k \binom{r}{k}$$

folglich auch

$$\binom{r+w}{k} - \binom{w}{1}\binom{r+w-1}{k} + \ldots + (-1)^k \binom{r}{k} = \binom{r}{k-w}$$

Setzt man hier $k = r + t - 1$, so ergibt sich, da der erste Theil der Gleichung, wegen dem Verschwinden der Binomialcoefficienten mit negativen Zeigern nur bis zu dem Gliede

$$\binom{w}{w-t+1}\binom{r+t-1}{r+t-1}=\binom{w}{w-t+1}$$

fortgesetzt werden kann, die Gleichung

$$\binom{r+w}{r+t-1}-\binom{w}{1}\binom{r+w-1}{r+t-1}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(-1)^{w-t}\binom{w}{w-1}\binom{r+t}{r+t-1}$$
$$+(-1)^{w-t+1}\binom{w}{w-t+1}=\binom{r}{r+t-1-w}$$

und hieraus wegen

$$\binom{r}{r+t-1-w}=\binom{r}{w-t+1}$$

$$\Delta^{w}\cdot{}^{t}_{o}=\binom{r}{w-t+1}-(-1)^{w-t}\binom{w}{w-t+1}$$

Nach gehöriger Berücksichtigung dieser Resultate findet man für die wte Differenz, auf welche die Gleichung (16) führt, folgenden Ausdruck

$$(18)\quad A_w+\binom{r}{1}A_{w+1}+\binom{r}{2}A_{w+2}+\ldots+\binom{r}{r-w-1}A_{r-1}$$
$$+\left[\binom{r}{w}-(-1)^{w}\right]A_r+\left[\binom{r}{w-1}+(-1)^{w}\binom{w}{w-1}\right]A_{r+1}$$
$$+\left[\binom{r}{w-2}-(-1)^{w}\binom{w}{w-2}\right]A_{r+2}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\left[\binom{r}{1}+\binom{w}{1}\right]A_{r+w-1}=0$$

Setzt man in dieser Gleichung $r+w=$ der ungeraden Zahl $2n-1$, und insbesondere $r=w=n$, so kommen darin bloss jene der Grössen A_1, A_2, A_3,... vor, deren Zeiger ungerade sind, und zwischen den Grenzen n und $2n-1$ liegen. Lässt man $n=2$ seyn, so findet man $3A_3=0$, oder $A_3=0$; daher müssen, wie man leicht sieht, wenn man $n=3, 4, 5\ldots$ setzt, alle Zahlen, welche durch A mit ungeraden Zeigern vorgestellt werden, verschwinden.

Setzt man aber $w=n$ und $r=n+1$, also

$r + w - 1 = 2n$, und nach und nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ so erhält man ein System von Gleichungen, welches mit Zuziehung der Gleichung $1 + \binom{2}{1} A_1 = 0$ zur Berechnung der Werthe von $A_2, A_4, A_6 \ldots$ bequemer ist, als der Inbegriff der Gleichungen (15).

Die Zahlen $A_2, A_4, A_6, A_8, \ldots$ heissen die Bernoullischen Zahlen. Wir wollen sie mit $B_1, B_2, B_3, B_4 \ldots$ bezeichnen.

Bei dem Gebrauche der Gleichung (18) muss selbst unter der Voraussetzung $w = n$ und $r = n + 1$ noch unterschieden werden, ob n gerade oder ungerade ist. Es sey erstlich $n = 2m$, so hat man, wenn man auf die für ganze positive Werthe von p bestehende Gleichung $\binom{p}{q} = \binom{p}{p-q}$ Rücksicht nimmt:

$$(19)\quad B_m + \left[\binom{2m}{1} + \binom{2m+1}{2}\right]B_{m+1} + \left[\binom{2m}{3} + \binom{2m+1}{4}\right]B_{m+2} + \left[\binom{2m}{5} + \binom{2m+1}{6}\right]B_{m+3} + \ldots \ldots + (4m+1)B_{2m} = 0$$

Setzt man aber $n = 2m + 1$, so wird:

$$(20)\quad \left[1 + \binom{2m}{1}\right]B_m + \left[\binom{2m-1}{2} + \binom{2m}{3}\right]B_{m+1} + \left[\binom{2m-1}{4} + \binom{2m}{5}\right]B_{m+2} + \ldots \ldots + (4m-1)B_{2m-1} = 0$$

Der Werth von B_1 muss aus den Gleichungen

$$1 + 2A_1 = 0, \text{ und } A_1 + 3A_2 = A_1 + 3B_1 = 0$$

abgeleitet werden, wovon die letztere aus (18) entspringt, wenn man $w = 1$, und $r = 2$ seyn lässt. Man findet $A_1 = -\frac{1}{2}$, folglich $B_1 = \frac{1}{6}$.

Die Werthe von $B_2, B_3, B_4 \ldots$ ergeben sich aus den Gleichungen (19) und (20), wenn man daselbst

nach und nach $m = 1, 2, 3, 4 \ldots$ annimmt, und die aus jeder früheren speciellen Gleichung gewonnenen Werthe in die spätere einführt. Man erhält

$B_1 + 5B_2 = 0$	$5B_2 + 7B_3 = 0$
$B_2 + 14B_3 + 9B_4 = 0$	$7B_3 + 30B_4 + 11B_5 = 0$
$B_3 + 27B_4 + 55B_5 + 13B_6 = 0$	$9B_4 + 77B_5 + 91B_6 + 15B_7 = 0$
$B_4 + 44B_5 + 182B_6 + 140B_7 + 17B_8 = 0$	$11B_5 + 156B_6 + 378B_7 + 204B_8 + 19B_9 = 0$
u. s. w.	u. s. w.

und hieraus

$$B_2 = -\tfrac{1}{30},\quad B_3 = \tfrac{1}{42},\quad B_4 = -\tfrac{1}{30},\quad B_5 = \tfrac{5}{66},\quad B_6 = -\tfrac{691}{2730},\quad B_7 = \tfrac{7}{6},\quad B_8 = -\tfrac{3617}{510},$$
$$B_9 = \tfrac{43867}{798}, \text{ etc.}$$

M. Aigner sc.

